Feuille d'exercices sur « équations différentielles linéaires du premier ordre »

Exercice n°1

Résoudre les équations homogènes suivantes :

1) $y' + \cos(x)y = 0$ sur $\mathbb{R}$
2) $(1+x^2)y' + xy = 0$ sur $\mathbb{R}$

Exercice n°2

Soient a et b deux fonctions T-périodiques sur $\mathbb{R}$, soit l'équation différentielle (E) : $y' + a(x)y = b(x)$

1) Montrer que si y est solution de (E) alors la fonction z définie de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, par $z(x) = y(x+T)$ est aussi solution.
2) Montrer qu'une solution y de (E) est T-périodique si et seulement si $y(0) = y(T)$

Exercice n°3

Résoudre les équations différentielles sur des intervalles sur lesquels la fonction en facteur de y' ne s'annule pas :

1) $(x\ln x)y' - y = \frac{-1}{x}(\ln(x)+1)$
2) $(1+x)y' + y = 1+\ln(1+x)$
3) $(1-x)y' + y = \frac{x-1}{x}$

Exercice n°4 (autocorrection)

Résoudre les équations différentielles sur des intervalles sur lesquels la fonction en facteur de y' ne s'annule pas :

1) $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$
2) $y'\sin(x) - y\cos(x)+1 = 0$
3) $2xy' + y = x^n$ où n est un entier naturel.

On obtient :

Pour 1) $y=\frac{\ln(1+e^x)}{e^x} + \frac{A}{e^x}$ avec $A\in \mathbb{R}$

Pour 2) Sur $]0,\pi[$, $y=\cos(x)+A\sin(x)$ avec $A\in \mathbb{R}$

Pour 3) sur $]0,+\infty[$, pour $n=0$, $y=1+\frac{A}{\sqrt{x}}$, pour $n>0$, $y=\frac{1}{2n+1}x^n + \frac{A}{\sqrt{x}}$ avec $A\in \mathbb{R}$

Exercice n°5

Trouver toutes les solutions f dérivables de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{C}$ telles que : $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x)f(y)$

Exercice n°6

Soit I un intervalle symétrique par rapport à 0, a et b des fonctions continues sur I et impaires, montrer que toute solution de (E) : y' + a(x)y = b(x) est paire.

Exercice n°7

Résoudre sur]-1 ;+∞[, l'équation différentielle : (x+1)y'(x) – xy(x) + 1 = 0 avec y(0) = 2

Exercice n°8

Résoudre sur]0 ;+∞[, l'équation différentielle : xy'(x) + y(x) = Arctan(x)

Exercice n°9

On considère l'équation différentielle (E) : ty' - 2y = t^3

1) Résoudre (E) sur]- ∞,0[
2) Résoudre (E) sur]0,+∞[
3) Déterminer la solution y_0 de (E) admettant une limite en 0
4) En étudiant le taux d'accroissement de $\frac{y_0(x)-y_0(0)}{x}$, pour x>0 et x<0, étudier la dérivabilité de y_0
5) Peut-on trouver une solution de (E) sur ℝ ? On parle de problème de raccord.

Exercice n°10 (oraux de concours)

Trouver les fonctions f continues vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) - \int_0^x f(x-t)\cos t \, \mathrm{d}t = 1.$$

Exercice n°11

Soit a : $R \to R$ une fonction continue, soit y,z : ℝ → ℝ dérivables vérifiant y(0)=z(0)=1

De plus, y vérifie l'inégalité : y'≥ay et z vérifie l'équation z'=az

On souhaite démontrer que $\forall t \in \mathbb{R}+$, y(t) ≥ z(t)

1) A l'aide de l'unicité au problème de Cauchy, justifier que la fonction z ne peut pas s'annuler sur ℝ (*ind. On remarquera que la fonction nulle est solution de l'équation*)
2) On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que z(α)<0, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires entre 0 et α, aboutir à une contradiction avec le 1)
3) On suppose d'après la question 2) que $\forall t \in \mathbb{R}$, z(t)>0, on considère la fonction f définie par f(t) = $\frac{y(t)}{z(t)}$

   a) Déterminer f '(t)

   b) Démontrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, f '(t)≥0

   c) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}+$, f(t) ≥1, et conclure !