Feuille d'exercices d'algèbre générale.

Exercice n°1

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1) Soit f : $[0 ;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x\to \sqrt{x^2+1}$
2) Soit f : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $z\to e^z$
3) Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x\to x+\frac{1}{x^2+1}$ (ind. On constatera que $x^4+2x^2+1-2x = x^4+x^2+(x-1)^2$)

Exercice n°2

Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x)=x^2-x-1$

1) Déterminer $f([\frac{1}{2}\ ,1])$
2) Déterminer $f^{-1}(\{0\})$

Exercice n°3

Soient : E, F, G 3 ensembles, f une application de E dans F, et g une application de F dans G.

1) Montrer que si gof est injective, alors f est injective.
2) Montrer que si gof est surjective, alors g est surjective.
3) On suppose que E = G et que fogof est bijective, montrer que f et g sont bijectives.

Exercice n°4

On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, définie par $f(x,y) = (x-4y,2x+3y)$

1) Montrer que f est bijective
2) Déterminer $f(\Delta)$ avec $\Delta = \{(x,y\}\in \mathbb{R}^2, x+2y = 1\}$
3) Déterminer $f^{-1}(\Delta)$

Exercice n°5

Soit $f\in F(E,F)$ et $g\in F(F,G)$

1) Montrer que si gof est surjective et g injective, alors f est surjective.
2) Montrer que si gof est injective et f surjective alors g est injective.

Exercice n°6

Soit E et F deux ensembles

1) Montrer que : $F\subset E \Leftrightarrow E\cap F = F$
2) Montrer que $F\subset E \Leftrightarrow E\cup F = E$

Exercice n°7

Soient A et B deux parties d'un ensemble E, on pose $A\,\Delta B = (A\backslash B)\ \cup B\backslash A)$

1) Montrer que $A\Delta B = (A\cup B)\backslash(A\cap B)$
2) Déterminer la fonction indicatrice de $A\Delta B$ en fonction de la somme et du produit de celles de A et de B.
3) En déduire que $A\Delta B = B$ si et seulement si $A = \emptyset$

Exercice n°8

Soit A une partie d'un ensemble E et f une application de E dans F:

1) Montrer l'inclusion $f(E)\backslash f(A) \subset f(\bar{A})$
2) Montrer que : $A \subset f^{-1}(f(A))$
3) Soit B une autre partie de F, montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$, puis que $f(f^{-1}(B)) = f(E) \cap B$

Exercice n°9

Soit $E = \{1,2,3\}$, décrire $P(E)$

Exercice n°10

Soit A une partie de E, et $f : P(E) \to P(E)$, $X \to X \cap A$

1) Montrer que f est injective ssi $A = E$
2) Montrer que f est surjective ssi $A = E$

Exercice n°11

Soit f définie de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x ;y) \to (x+y, xy)$

1) Est-ce que f est injective ?
2) Est-ce que f est surjective ?

Exercice n°12

Décrire $P(P(\{1\}))$ (on fera la distinction entre $\{1\}$ et **$\{\{1\}\}$**)

Exercice n°13

Quelle est la différence entre $\emptyset$ et $\{\emptyset\}$?

Exercice n°14

Soit h réel strictement positif, on pose $J_h =]-h ;h[$

1) Montrer que $\bigcap_{h \in \mathbb{R}^{*+}} J_h = \{0\}$
2) Montrer que $\bigcup_{h \in \mathbb{R}^{*+}} J_h = \mathbb{R}$

Exercice n°15

Soit f une application de E dans F, $(B_i)_{i \in I}$ une famille de parties de F, montrer que :

1) $f^{-1}(\bigcup (B_i)_{i \in I}) \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$
2) $f^{-1}(\bigcap (B_i)_{i \in I}) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$