Fiche d'exercices : « Les groupes »

Exercice n°1

Soit (G,$*$) un groupe tel que $\forall x \in G, x * x = e$, montrer que G est commutatif où e désigne le neutre de G

Exercice n°2

Soit $E = [0, 1]$. On définit une loi $*$ sur E par : $x * y = x + y - xy$.
a) Montrer que $*$ est une loi de composition interne commutative et associative.
b) Montrer que $*$ possède un neutre.
c) Quels sont les éléments symétrisables ?

Exercice n°3

Soit w un complexe non réel et H = {a+bw/ (a,b)$\in \mathbb{Z}^2$}, montrer que (H,+) est un sous-groupe de ($\mathbb{C}$,+)

Exercice n°4

Soit a un complexe non nul, et H = {a^n/ n$\in \mathbb{Z}$ }, montrer que (H,$\times$) est un sous-groupe de ($\mathbb{C}^*$,$\times$)

Exercice n°5

Soit (G,$*$) un groupe, on appelle centre de G, C={x$\in G$, *tels que* $\forall y \in G$, $x * y = y * x$ }
Montrer que (C, $*$) est un sous-groupe de (G,$*$)

Exercice n°6

1) Démontrer que exp :($\mathbb{C}$, +) $\rightarrow$ ($\mathbb{C}^*$,$\times$) est un morphisme de groupes
2) Déterminer son image et son noyau

Exercice n°7

Soit (G,.) un groupe, A et B deux ss groupes de G.
1) Montrer que A$\cap$B est un sous-groupe de G.
2) Montrer que A$\cup$B est un sous-groupe de G ss A est inclus dans B ou B inclus dans A.

Exercice n°8

On souhaite déterminer l'ensemble des morphismes de ($\mathbb{Z}$,+) dans lui-même, et préciser lesquels sont injectifs, surjectifs.
Soit f un morphisme de ($\mathbb{Z}$,+) dans lui-même
a) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a $f(n) = nf(1)$
b) Montrer que le résultat persiste pour $n \in \mathbb{Z}$ et conclure sur l'ensemble des morphismes.
c) Montrer que les seuls morphismes surjectifs correspondent à f(1) = $\pm$1
d) Montrer que tous les morphismes sont injectifs hormis l'application nulle.

Exercice n°10

[Addition des vitesses en théorie de la relativité] Soit $c > 0$(c correspond à la vitesse - ou célérité - de la lumière) et $I =]-c\,; c[$.

(a) Montrer
$$\forall (x, y) \in I^2, x * y = \frac{x + y}{1 + \frac{xy}{c^2}} \in I$$

(b) Montrer que la loi $*$ munit I d'une structure de groupe abélien.
Cette loi $*$ correspond à l'addition des vitesses portées par un même axe en théorie de la relativité.

Exercice n°11

Soit $(G,\star)$ un groupe, et $H=\{x\in G,\ \forall g\in G,\ (x\star g)^2=(g\star x)^2\}$. Montrer que H est un sous-groupe de G.

Exercice n°12

1) On souhaite montrer que $(\mathbb{R}^*,\times)$ et $(\mathbb{C}^*,\times)$ ne sont pas isomorphes.
   a) Soit f un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ dans $(\mathbb{R}^*,\times)$, déterminer f(1)
   b) Déterminer f(-1)
   c) Conclure
2) Soit f un morphisme des groupes $(G,*)$ dans $(G',\blacksquare)$
   Soit H' sous-groupe de G', montrer que $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G.

Exercice n°13

On considère sur $\mathbb{R}$ la loi définie par $x \star y = xy + (1-x^2)(1-y^2)$.

1. Cette loi est-elle commutative ? Justifier.

2. Cette loi admet-elle un élément neutre ? Justifier.

Exercice n°14

Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On note $U_n=\{z\in\mathbb{C} \mid z^n=1\}$.

1. Montrer que $(Un, \times)$ est un groupe. ($\times$ représente la multiplication usuelle dans C.)

2. On définit l'application suivante : $\phi : \mathbb{Z} \to U_n,\ k \to e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

Montrer que ϕ est un morphisme de groupes.

3. Déterminer le noyau de ϕ.

4. Est-ce que ϕ est un isomorphisme de groupes ? Justifier

Exercice n°15 (oraux INP)

1. Soit E un ensemble. Vérifier que l'ensemble des bijections de E dans E muni de la loi de composition est un groupe (on justifiera chaque point sans le démontrer).
2. Pour tout complexe a non nul et pour tout complexe b, on considère les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$:

$$f_a : z \mapsto az \text{ et } g_b : z \mapsto z+b$$

   (a) Montrer que f_a et g_b sont des bijections.

   (b) Montrer que $H=\{f_a, a\in\mathbb{C}^*\}$ et $H'=\{g_b, b\in\mathbb{C}\}$ sont des sous-groupes du groupe des bijections de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

   (c) Déterminer les couples $(a,b)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$ pour lesquels $f_a\circ g_b = g_b\circ f_a$.