Feuille d'exercices : Suites numériques

Exercice n°1

1) Montrer que si une suite est bornée à partir d'un certain rang, alors elle est bornée.
2) Est-ce que le produit de deux suites minorées est encore minoré ?
3) Soit une suite (u_n) définie par récurrence : $u_{n+1}=f(u_n)$, quel lien peut-on faire entre les points fixes de l'itératrice de u_n et ceux de u_{2n}

Exercice n°2

Soit (u_n) une suite, parmi les suites proposées lesquelles sont des suites extraites de (u_n) ?

(u_{-n}), (u_{6n}), (u_{2n}), $(u_{3\times 2^n})$, $(u_{3\times 2^{n+1}})$, (u_{2^n}) et $(u_{2^{n+1}})$

Est-ce que (u_{6n})est extraite de (u_{2n}) ? et $(u_{3\times 2^n})$ de (u_{2^n}) ?

Exercice n°3

Etudier les limites des suites suivantes :

$u_n = \frac{\sin(n^2)}{n}$ $v_n = \frac{n^3+5n}{5n^3+\cos(n)+\frac{1}{n^2}}$ $w_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ (a>0 et b>a) $t_n = \frac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$

Exercice n°4

Soit (a_n) et (b_n) deux suites qui convergent vers L et L'

Soit les suites (u_n) et (v_n) définies respectivement par $u_n = \min(a_n\,;b_n)$ et $v_n = \max(a_n\,;b_n)$

Etudier la convergence de (u_n) et (v_n).

Exercice n°5

Pour n entier naturel non nul, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$, ces suites sont-elles adjacentes ?

Exercice n°6

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies respectivement par $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$

Et $u_0>0$, $v_0>0$

1) Montrer que pour tout entier naturel non nul : $u_n \leq v_n$
2) Montrer que les deux suites u et v convergent vers une même limite.

Exercice n°7

Etudier la suite u définie par $u_0 = -½$ et pour tout entier naturel, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$

Exercice n°8 (concours)

Soit $n \geq 2$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. L'objectif de l'exercice est d'étudier la convergence de cette suite.

1. Soit $n \geq 2$, on pose $z_n = e^{\frac{i\pi}{n}}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} z_n^k$. Justifier.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 2$: $\frac{2}{1-z_n} = 1 + i\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

3. En déduire que, pour tout $n \geq 2$: $S_n = \dfrac{1}{tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.
4. La suite (S_n) converge-t-elle ? Justifier.
5. Soit $n \geq 2$, on pose $u_n = \dfrac{S_n}{n}$. Montrer que la suite (u_n) converge. Vous déterminerez sa limite.

Exercice n°9

Etant donné un réel θ, pour tout entier naturel, on pose : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{2^k}$

Montrer que la suite (u_n) est convergente et en déterminer la limite.

Exercice n°10

Soit la fonction f : I→I, décroissante et a ∈I, on considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = a$ et $u_{n+1}=f(u_n)$. Montrer que les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de sens de monotonie opposé.

Exercice n°12

A l'aide d'une étude de fonction, étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 1/10$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

Exercice n°13

Même énoncé que l'exercice n°12 avec $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$

Exercice n°14

Même énoncé que l'exercice n°12 avec $u_0 = a>0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$

Exercice n°15

Donner une expression en fonction de n, de la suite u_n définie par : $u_{n+2} = 2u_n - u_{n+1}$ et $u_0=0$, $u_1=3$

Même question, avec v_n vérifiant : $v_{n+2}=v_{n+1}-v_n$ et $v_0=1$, $v_1=2$ (uniquement les expressions réelles)

Exercice n°16

1) Montrer que la fonction h définie par $h(x)=x^3+x^2-3x-2$ ne s'annule pas sur $[0,\sqrt{2}]$
2) Montrer que $\sqrt{2-\sqrt{2-x}} = x \Leftrightarrow (x-1)(x^3+x^2-3x-2)=0$ et conclure quant aux solutions.
3) Etudier la nature de la suite définie par : $u_0=0$ et $u_{n+1}=\sqrt{2-u_n}$

Exercice n°17

Pour tout entier n, on pose $I_n = \int_1^e (lnx)^n dx$, montrer que la suite converge.

Exercice n°18

Pour tout entier n, on définit f_n par $f_n(x) = x^3+nx-2$

1) Montrer que pour tout entier naturel n, f_n s'annule en un unique point qu'on appelle x_n
2) Montrer que la suite (x_n) ainsi définie converge et déterminer sa limite.

Exercice n°19

Soit la suite u définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, montrer que les suites v et w définies par $v_n=u_{2n}$ et $w_n=u_{2n+1}$ sont adjacentes, et en déduire que u converge.

Exercice n°20

Soit la suite u définie par $u_0=1$ et pour tout entier non nul, $u_{n+1}=2u_n-1$

Déterminer en étudiant $v_n=u_n-1$, l'expression de u_n

Exercice n°21 (concours)

Soit f : $]0,+\infty[\to]0,+\infty[$, $x\to 1+\frac{2}{x}$ et on définit la suite (u_n) par $u_{n+1}=f(u_n)$ et $u_0=1$

1) Déterminer les variations de f sur [1 ;3]
2) Montrer que [1 ;3] est stable par f (c'est-à-dire que f([1 ;3])⊂ [1 ;3])
   Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
3) Déterminer les monotonies de (u_{2n}) et (u_{2n+1})
4) Démontrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent.
5) Déterminer les limites respectives de (u_{2n}) et (u_{2n+1})
6) Que peut-on conclure pour (u_n) ?

Exercice n°22 (concours)

On dit qu'une suite (u_n) est une suite de Cauchy lorsque :

$$\forall\epsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2,(p>q>N\Rightarrow|u_p-u_q|\leq\epsilon)$$

1. Ecrire la négation de la définition d'une suite de Cauchy (donc en déduire la définition d'une suite qui n'est pas de Cauchy).
2. Montrer que la suite $(\ln(n))_{n\geq1}$ n'est pas une suite de Cauchy.
3. Montrer que la suite (u_n) définie par : $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, u_n=1-\frac{1}{n}$ est une suite de Cauchy.
4. Montrer que toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Exercice n°23 (concours)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par : $u_0=1, v_0=2$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\frac{2}{u_{n+1}}=\frac{1}{u_n}+\frac{1}{v_n}$ et $v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}$, montrer $u_n>0$ et $v_n>0$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$, montrer $u_n\leq v_n$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Démontrer que ces deux suites convergent vers la même limite.
5. Etudier la suite $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer la valeur de la limite commune de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice n°24

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0\in]1,+\infty[$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\frac{u_n^2+u_n}{2}$

1) En cas de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, préciser quelles sont les limites possibles.
2) Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{x^2+x}{2}$ pour tout x∈ $[0,+\infty[$, dresser le tableau de variations de f et le signe de la fonction $x\to f(x)-x$ sur $[0,+\infty[$
3) Montrer que pour tout entier naturel $u_n\geq1$. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
4) Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$
5) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n=\frac{1}{2^n}\ln\left(\frac{u_n}{2}\right)$
6) Montrer que $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$. En déduire le sens de variation de v_n
7) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, v_{n+1}\leq v_n+\frac{\ln(2)}{2^{n+1}}$
8) Démontrer par récurrence que : que $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}, v_n\leq v_0+\ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$
9) Démontrer que v_n est bornée et démontrer que la suite v_n converge.

Exercice n°25 (concours)

On considère les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}.$$

Le but de l'exercice est de prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge et de déterminer la valeur de la limite de cette suite.

1. Prouver que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer la valeur de sa limite.

2. Prouver que : $\forall x \in [0, +\infty[,\ x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$.

3. Justifier le fait que, pour tout entier naturel n non nul, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 \leqslant n^4$.

4. Prouver que pour tout entier naturel n non nul , $v_n - \dfrac{1}{6n^2} \leqslant u_n \leqslant v_n$.

5. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer la valeur de sa limite.