Feuille d'exercices sur « Continuité »

Exercice n°1

1) Montrer que $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}E(\frac{1}{\sqrt{x}}) = 1$
2) Montrer que $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = 0$
3) Déterminer $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+2x} - x)$
4) Déterminer $\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x})$
5) Déterminer $\lim_{x \to \infty} \frac{-x^3+x^2+5}{5x^3-x^2+2}$
6) Déterminer $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+5x-1}{5x^3-x^2+2}$

Exercice n°2

Soit f :$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x→x-E(x)

Soit n un entier relatif, déterminer, si elles existent, $\lim_{x \to n_{x<n}} f(x)$ et $\lim_{x \to n_{x>n}} f(x)$

Exercice n°3

Soit f :$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que f(x)= $\begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) si\ x > 0 \\ 0\ sinon \end{cases}$, la fonction f est-elle continue ?

Exercice n°4

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ f(x) = exp(-1/x^2) admet un prolongement par continuité en 0.

Exercice n°5

Soient f et g deux fonctions : I→ $\mathbb{R}$ continues en a ∈I

Démontrer que les fonctions sup{f,g} et inf(f,g) sont continues en a.

Exercice n°6

Soit f :$\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, croissante telle que x→ $\frac{f(x)}{x}$ soit décroissante, démontrer que f est continue en tout point.

Exercice n°7

Soit f : I→ $\mathbb{R}$, une fonction continue telle que f(I)⊂ $\mathbb{Z}$, démontrer que f est constante.

Exercice n°8

1) Montrer que toute fonction polynomiale réelle de degré impair admet au moins un zéro sur $\mathbb{R}$
2) Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et périodique est bornée et atteint ses bornes.

Exercice n°9

Soit f :$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0, telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, f(2x) = f(x), montrer que f est constante.

Exercice n°10

Soit f :$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Démontrer que f est minorée et que sa borne inférieure est atteinte.

Exercice n°11

Pour $x\in[1,+\infty[$, on pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t+\sqrt{t}}$

1) Que vaut, pour x>0, $\int_x^{2x} \frac{dt}{t}$?
2) Démontrer que pour tout $t\in[1,+\infty[$, $0\leq \frac{1}{t} - \frac{1}{t+\sqrt{t}} \leq \frac{1}{t^{3/2}}$
3) En déduire une majoration de $|\ln(2) - f(x)|$
4) Quelle est : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Exercice n°12

Soit f :$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction continue, telle qu'il existe un réel a vérifiant fof(a) = a, montrer qu'il existe un réel c tel que f(c) = c

Exercice n°13

Démontrer que f :$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x+1$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice n°14 (Concours)

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ telle que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) > 0$.

1. Montrer que la fonction $\frac{1}{f}$ est bornée.
2. Cette proposition est-elle encore vraie si on remplace $[a,b]$ par un intervalle I quelconque ? illustrer votre propos.
3. On suppose de plus que f est lipschitzienne sur $[a,b]$, c'est-à-dire qu'il existe $k \geq 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$$

   Montrer que la fonction $\frac{1}{f}$ est également lipschitzienne.

Exercice n°15

Soit f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T-périodique, on suppose que f admet une limite finie en $+\infty$, montrer que f est constante.

Exercice n°16

Soit f la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = (E(x))^2 + (2E(x)+1)(x-E(x))$

1) Montrer que f est paire
2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice n°17

1) Soit f : [0, 1] → [0, 1] une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe
2) Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe

Exercice n°18

Cet exercice nécessite de savoir que $\mathbb{Q}$ dense $\mathbb{R}$ ce qui signifie que dans n'importe quel intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et ne comportant pas un seul élément (donc au moins deux éléments), on peut trouver un rationnel (donc appartenant à $\mathbb{Q}$).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$

a) Calculer $f(0)$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.

b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.

c) Etablir que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = ar$ avec $a = f(1)$.

d) Conclure que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.

Exercice n°19

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $\forall x \in I, |f(x)| = |g(x)| \neq 0$.

Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice n°20

Soient $f, g : [a, b] \to R$ continues telles que $\forall x \in [a, b]$, $f(x) < g(x)$

Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x) - \alpha$

Exercice n°21

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$.

b) Déterminer, pour $y \in]-1, 1[$ une expression de $f^{-1}(y)$ analogue à celle de $f(x)$.

c) f est-il un homéomorphisme ? *(à savoir f bijective, f continue et f^{-1} continue)*

Exercice n°22

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue en 0 et en 1 et vérifiant pour tout réel x : $f(x) = f(x^2)$.

Montrer que f est constante.

Exercice n°23

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in]0,1[\\ x-1 \text{ si } x [2,3[\end{cases}$

1) Montrer que f définit une bijection réciproque, continue et strictement croissante de son domaine de définition sur]0,2[
2) Son application réciproque est-elle continue ?

Exercice n°24

Soient u et v deux fonctions continues de [0,1] dans $\mathbb{R}$ telles que u(0)=v(1)=0 et u(1)=v(0)=1

Montrer qu'il existe x∈[0,1] tel que u(x)=v(x)