**Fiche d'exercices sur polynômes**

**Exercice n°1**

Soit n entier non nul, déterminer le degré et le coefficient dominant de $P = (X-2)^n - (X+5)^n$

**Exercice n°2**

Soit $A = 2X^5 - 4X^4 + 6X^3 + 3X^2 - 5X + 8$ et $B = X^2 - 2X + 3$

Effectuer la division euclidienne de A par B.

**Exercice n°3**

Montrer que la fonction sin n'est pas polynomiale.

**Exercice n°4**

Soit n un entier non nul, montrer que le polynôme $(X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$ est divisible par $X^2 - 3X + 2$

**Exercice n°5**

Soit n entier naturel non nul, décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $X^n + 1$ en produit de polynômes du premier degré.

**Exercice n°6**

1) Quelles sont les relations liant les coefficients et les racines d'un polynôme scindé de degré 3 ?
2) Montrer qu'un polynôme de degré 3 de $\mathbb{R}[X]$ possède au moins une racine réelle.

**Exercice n°7**

Déterminer tous les polynômes P tels que $P(1) = 1$, $P'(1) = 3$, $P''(1) = 8$ et $P^{(n)}(1) = 0$ si $n>2$

**Exercice n°8**

Soit n entier supérieur ou égal à 2, déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n + nX^{n-1} + X^2 + 1$ par $(X+1)^2$

**Exercice n°9**

Soit le polynôme P défini par $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$, déterminer $P^{(l)}(X)$

**Exercice n°10 :** Factoriser $X^8 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

**Exercice n°11**

Soit P le polynôme $X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$

1) Montrer que 2 est racine
2) Quel est l'ordre de multiplicité de cette racine.
3) Déterminer les autres racines de P avec leur ordre de multiplicité.

**Exercice n°12**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de $\varkappa$

1) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, justifier l'existence et l'unicité d'un polynôme $L_k \in \varkappa_{n-1}[X]$, vérifiant : $L_k(x_k) = 1$ et $\forall j \in [\![1, n]\!] \backslash \{k\}$, $L_k(x_j) = 0$

2) Montrer que pour tout P∈ $\varkappa_{n-1}$[X], on a P = $\sum_{k=1}^{n} P(x_k)L_k$

Remarque : Les polynômes $L_1$,…, $L_n$ sont appelés polynômes de Lagrange associés à la famille ($x_1$,…,$x_n$)

**Exercice n°13**

Soit P(X)∈ ℝ[X] tel que P(X)=P(-X), montrer qu'il existe un polynôme Q de ℝ[X], tel que P(X) = Q($X^2$)

**Exercice n°14 :** Factoriser $X^6$-2cos($6\theta$)$X^3$+1 sur ℝ[X] et sur $\mathbb{C}[X]$

**Exercice n°15**

Soit P(X)= $X^4$-2$X^3$+6$X^2$-2X+5

Montrer que i est racine de P, en déduire une factorisation sur ℝ[X] et sur $\mathbb{C}[X]$

**Exercice n°16 :** Soit P et Q deux polynômes tels que $P^2$=(X-1)$Q^2$, montrer que P=Q=0

**Exercice n°17 :** Déterminer P dans ℝ[X], tel que P($X^2$)=($X^2$+1)P(X)

**Exercice n°18 :** Montrer que $(X+1)^{2017}$-$X^{2017}$-1 est divisible par $X^2$+X+1

**Exercice n°19**

**Les 3 questions sont indépendantes**

1) Soient A et B deux polynômes de $\varkappa$[X], montrer que deg(AoB) ) deg(A)deg(B)
2) Soit T un réel non nul, déterminer tous les polynômes de ℝ[X] dont la fonction polynomiale associée est T-périodique.
3) Trouver toutes les racines complexes du polynôme $X^4$+12X-5 sachant que deux de ces racines ont une somme égale à 2.

**Exercice n°20**

Décomposer en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$

1) $X^4 + 1$
2) $X^7$-1

**Exercice °21**

Soit P(X) = $a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1}$+…+$a_0$ à coefficients dans ℤ

1) Montrer que si P admet une racine rationnelle de la forme $\frac{p}{q}$ avec p∧q=1 alors p|$a_0$ et q|$a_n$
2) Le polynôme $X^5$-$X^2$+1 admet-il des racines dans ℚ ?

**Exercice n°22**

Soit un réel a, un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, tel que : $\forall n \leq \deg(P)$ , $P^{(n)}(a) > 0$

Montrer que P n'admet pas de racines dans [a,+∞[

**<u>Exercice n°23</u>**

Soit n entier naturel,

1) montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C}^*$,

   $P(z+\frac{1}{z}) = z^n + \frac{1}{z^n}$

2) Montrer que toutes les racines de P sont réelles, simples et dans [-2 ;2]

**<u>Exercice n°24</u> (Devoir commun INP 2025)**

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$.
Dans $\mathbb{C}[X]$, on pose $P = (X - a)(X - b)(X - c)$.
On note $s = a + b + c$ , $\quad d = ab + ac + bc \quad$ et $\quad r = abc$.

1. Montrer que $P = X^3 - sX^2 + dX - r$.
2. On suppose que $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ vérifient $s = r = \dfrac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$.
   a) Montrer que $d = 1$ et factoriser $P$.
   b) En déduire l'ensemble E des triplets $(a, b, c)$ de nombres complexes vérifiant
   $a + b + c = abc = \dfrac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$.

**<u>Exercice n°25</u> (Devoir Commun INP 2023)**

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ , rappeler les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation
$$z^n - 1 = 0.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$. Retrouver, en justifiant vos calculs, la valeur de la somme
$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k.$$
3. Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $1 - \mathrm{e}^{i\theta} = -2i \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}$.
   Donner, sans la justifier, une transformation similaire de $1 + \mathrm{e}^{i\theta}$.
4. Dans cette question et les suivantes, on considère un entier naturel $n \geqslant 2$.
   On note toujours $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$.
   Déduire de la question 3 la forme algébrique du complexe $\dfrac{1 + \omega^k}{1 - \omega^k}$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ le polynôme $P = (\mathrm{X} + 1)^n - (\mathrm{X} - 1)^n$.
   (a) Quel est le degré de $P$ ? Quel est le cœfficient dominant de $P$ ? Quel est son cœfficient constant ?
   (b) En utilisant les racines $n$-ièmes de l'unité et les questions précédentes, factoriser le polynôme $P$ sur $\mathbb{C}$.
6. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,
$$\prod_{k=1}^{2p} \tan\left(\frac{k\pi}{2p + 1}\right) = (-1)^p (2p + 1).$$