Feuille d'exercices sur Espaces vectoriels

Exercice n°1

Soit $a \in \mathbb{R}$, montrer que la fonction $f_a : x \to \cos(x+a)$ est combinaison linéaire des fonctions sin et cos.

Exercice n°2

1) Montrer que l'ensemble $F = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$
2) En est-il de même pour $G = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$?

Exercice n°3

Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$, on note $E_{a,b}$ l'ensemble des suites $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

Montrer que $E_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

Exercice n°4

1) Montrer que (cos,sin) est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
2) La famille $(1,\sin,\cos,\sin^2,\cos^2)$ est-elle libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
3) Montrer que $(1, X+1, X^2+X+1)$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$

Exercice n°5

Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n, on considère la famille

$\left(1, X-a, \frac{(X-a)^2}{2}, \dots, \frac{(X-a)^n}{n!}\right)$

1) Montrer que cette famille est libre
2) Montrer que cette famille est une base $\mathbb{K}_n[X]$
3) Soit P un polynôme de degré au plus n, donner ses coordonnées dans cette base.

Exercice n°6

1) Soit (x_1,x_2,x_3) une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E
   Montrer que $(x_2+x_3, x_3+x_1, x_1+x_2)$ est libre
2) Soit (x_1,x_2,x_3,x_4) une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E
   La famille $(x_1+x_2, x_2+x_3, x_3+x_4, x_1+x_4)$ est-elle libre ?

Exercice n°7

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to |x-a|$

Soit n un entier non nul, $a_1,\dots,a_n$ des réels distincts

Montrer que $(f_{a_1},\dots, f_{a_n})$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Exercice n°8

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to e^{ax}$

Montrer que pour tout entier naturel n, la famille $(f_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est libre

Exercice n°9

Soit F { $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4$: $x_1+x_2 = x_3+x_4 = 0$}, montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, préciser sa dimension.

Exercice n°10

Pour a∈ $\varkappa$, on considère la famille F = {1,(X-a),$(X\text{-}a)^2$,…, $(X\text{-}a)^n$} pour n entier

1) Montrer que F est une base de $\varkappa_n[X]$
2) En déduire une nouvelle démonstration de la formule de Taylor dite polynomiale.

Exercice n°11

Soit E un $\varkappa$-espace vectoriel de dimension finie, soit F un sous-espace vectoriel et H un hyperplan de E.

1) Montrer que dim(F∩H)≥dim(F) – 1
2) Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice n°12

Soit F_1 et F_2 deux familles finies d' $\varkappa$-espace vectoriel de dimension finie, on note F la famille obtenue en concaténant F_1 et F_2.

Montrer que : max(rgF_1, rgF_2)≤ rg(F) ≤ rgF_1+ rgF_2

Exercice n°13

Soit F={f∈ $C^1(\mathbb{R}), f(0) = f'(1) = 0$}, montrer que F est un sous-espace vectoriel de $C^1(\mathbb{R})$

Exercice n°14

Montrer que $\mathbb{R}_1[X]$ et vect(1+X+X^2) sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$

Exercice n°15

Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel E, montrer que vect(A∩B)⊂vect(A) ∩ vect(B)

Exercice n°16

1) Déterminer le rang de la famille suivante :
   X_1=(1,-1,1) ; X_2=(-1,1,-1) ; X_3=(0,1,1) et X_4=(1,0,2)
2) Compléter en une base de $\mathbb{R}^4$, la famille (e_1, e_2) avec e_1=(1,1,1,1) et e_2=(1,1,-1,-1)
3) Dans $\mathbb{R}^3$, soient u(1,0,2), v(1,1,2), w(1,2,2) et t(2,2,2)
   a) Montrer que (u,v,w,t) est un générateur de $\mathbb{R}^3$
   b) En extraire une base de $\mathbb{R}^3$

Exercice n°17

Soit F={f∈ $C(\mathbb{R}), f(0) = \int_0^1 f(t)dt = 0$ } et G={x→ $ax + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2$}

Montrer que F et G sont supplémentaires dans $C(\mathbb{R})$.

Exercice n°18

Déterminer un supplémentaire de F $=\{(x,y,z,t)\in \mathbb{R}^4, x+y+z=2x-y+2z+t=0\}$ dans $\mathbb{R}^4$

Exercice n°20

Soit F$=\{(x,y,z,t)\in \mathbb{R}^4, x+3y-z=t\}$

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^4,+,.)$
2) Déterminer une famille génératrice de F

Exercice n°21

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1) On suppose que dim(F)+dim(G)>dim(E), la somme est-elle directe ?
2) On suppose que dim(F)+dim(G)≤dim(E), la somme est-elle directe ?

Exercice n°22

Soit F$=\{P\in \mathbb{R}_3[X], P(-1)=P(0)=P(1)=0\}$, G $=\{P\in \mathbb{R}_3[X], P(0)=P(1)=P(2)=0\}$, et H $=\{P\in \mathbb{R}_3[X], P(0)=P(1)=0\}$. Montrer que H=F$\oplus$G

Exercice n°23

On note F$=\{P\in \mathbb{R}_3[X], P(0)=0\}$, donner une base de F et sa dimension.

Exercice n°24

On note G $=\{P\in \mathbb{R}_3[X], P(1)=P(2)=0\}$, donner une base de G et sa dimension.

Exercice n°25

1) Montrer que les polynômes $P_1=X$, $P_2=X-1$ et $P_3=(X-1)^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$
2) Déterminer les coordonnées de $P=2X^2-5X+6$ dans cette base.

Exercice n°26 (oraux concours)

Soit $F=\{P\in\mathbb{R}[X] : P(0)=0\}$ et $G=\left\{(a+b+c)-aX-bX^2-cX^3 : (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et déterminer une famille génératrice de G.
3. Déterminer $F\cap G$.

Exercice n°27 (oraux concours)

On pose $F=\{P\in\mathbb{R}_3[X]\ /\ P(0)+P'(0)=0\}$.

1. Prouver que F est un sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ et en déterminer une base.
2. Déterminer un supplémentaire de F sur $\mathbb{R}_3[X]$. Justifier votre réponse.