Chapitre 2 : « Calculs algébriques »

I. Somme et produit

1) Définitions :

Etant donnés des réels (et dans quelques temps des nombres complexes…) a_1, a_2, … a_n pour éviter l'ambiguïté des points de suspension et écrire plus rapidement, on désigne la somme $a_1 + \ldots + a_n$ par $\sum_{k=1}^{n} a_k$ et le produit $a_1 \times \ldots \times a_n$ par $\prod_{k=1}^{n} a_k$

Ex : $1 + 2 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k$ (au passage cette somme est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$)

Ex : $n ! = 1\times \ldots \times n = \prod_{k=1}^{n} k$

2) Sommes et produits particuliers

a) Somme et produit partiel

$a_p + \ldots + a_q = \sum_{k=p}^{q} a_k$ ou $\sum_{p\leq k\leq q} a_k$ ou encore $\sum_{k\in[\![p;q]\!]} a_k$

$a_p \times \ldots \times a_q = \prod_{k=p}^{q} a_k$ ou $\prod_{p\leq k\leq q} a_k$ ou encore $\prod_{k\in[\![p;q]\!]} a_k$

b) Cas d'une famille finie quelconque

Si I désigne un ensemble fini et non vide, alors on peut étendre les définitions précédentes à $(a_k)_{k\in I}$ et écrire : $\sum_{k\in I} a_k$ et $\prod_{k\in I} a_k$

c) Remarque

La lettre utilisée intervenant dans l'écriture des sommes et produits est une variable muette servant à décrire l'ensemble d'indexation, on peut utiliser n'importe quelle lettre : $\sum_{k\in I} a_k = \sum_{j\in I} a_j$

Exercice d'application : Calculer $\sum_{k\in[\![p;q]\!]} a$ et $\prod_{1\leq k\leq n} a$

Pour la somme : S = (p-q+1)a et P = a^n

Sommes et produits particuliers : $\sum_{k\in\emptyset} a_k = 0$ et $\prod_{k\in\emptyset} a_k = 1$

Exercice :

1) Soit $\Omega = \{1 ;4 ;5\}$, déterminer $\prod_{x\in\Omega}(x-1)$
2) Soit n un entier naturel :
   a) Calculer $\sum_{k=0}^{n} k$
   b) Calculer $\sum_{k=0}^{n} n$

3) Premières règles de calculs

a) Séparation : $\sum_{k\in I}(a_k + b_k) = \sum_{k\in I} a_k + \sum_{k\in I} b_k$
et $\prod_{k\in I} a_k\, b_k = (\prod_{k\in I} a_k)(\prod_{k\in I} b_k)$

b) Relation de Chasles : Si $p\leq r\leq q$ alors : $\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p}^{r} a_k + \sum_{k=r+1}^{q} a_k$
Et : $\prod_{k=p}^{q} a_k = (\prod_{k=p}^{r} a_k)(\prod_{k=r+1}^{q} a_k)$

c) Si I_1 et I_2 désignent deux ensembles disjoints alors :

$\sum_{k\in I_1\cup I_2} a_k = \sum_{k\in I_1} a_k + \sum_{k\in I_2} a_k$ et $\prod_{k\in I_1\cup I_2} a_k = (\prod_{k\in I_1} a_k)(\prod_{k\in I_2} a_k)$

On parle de sommation par paquets, dans la pratique, I_1 désigne souvent les termes pairs et I_2 les termes impairs, mais ce n'est pas exclusivement le cas !!!

Ex : Pour n ∈ ℕ*, calculer $S = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k$

On va distinguer les termes pairs et les termes impairs :
$S = \sum_{l=1}^{n}(-1)^{2l} \times 2l + \sum_{l=0}^{n-1}(-1)^{2l+1} \times (2l+1)$
$S = \sum_{l=1}^{n} 2l + \sum_{l=0}^{n-1} -(2l+1)$
$S = 2\sum_{l=1}^{n} l - 2\sum_{l=0}^{n-1} l - \sum_{l=0}^{n-1} 1$
$S = 2n - n = n$

d) Multiplication par un scalaire
Si α désigne un réel (et plus tard un complexe), $\sum_{k\in I} \alpha a_k = \alpha \sum_{k\in I} a_k$ et $\prod_{1\leq k\leq n} \alpha a_k = \alpha^n \prod_{1\leq k\leq n} a_k$

4) Changements d'indice
Dans certains cas, il peut être judicieux d'effectuer un changement dans l'indexation d'une somme ou d'un produit

Ainsi si r est un entier, dans la somme $S = \sum_{k=p}^{q} a_k$, on peut effectuer le changement d'indices : [j = k+r] et alors : $S = \sum_{j=p+r}^{q+r} a_{j-r}$

Exercice : Pour n≥2, calculer $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)}$

On décompose $\frac{2}{k(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$ et $S = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2})$

$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{l=3}^{n+2} \frac{1}{l}$ *avec l=k+2*

$S = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}$

5) Sommes télescopiques et produits télescopiques
On aura ici p≤q
a) Somme
On appelle somme télescopique toute somme $S = \sum_{k=p}^{q}(a_{k+1} - a_k)$
En utilisant une ré-indexation judicieuse, démontrer que $S = a_{q+1} - a_p$

b) Produit
On appelle produit télescopique tout produit de la forme $P = \prod_{k=p}^{q} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ où les facteurs a_k sont supposés tous non nuls.
En utilisant une ré-indexation judicieuse, démontrer que $P = \frac{a_{q+1}}{a_p}$

Exercice : Soit n∈ ℕ*, calculer : $S = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{1}{k})$

$S = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k))$

$S = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)$ - $\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$, en posant l = k+1 pour la première somme

$S = \sum_{l=2}^{n+1} \ln(k)$ - $\sum_{k=1}^{n} \ln(k)$ = ln(n+1)-ln(1) = ln(n+1)

6) Sommes doubles

a) Sommes sur un rectangle $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$

Soient $(b_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(c_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$ deux familles de réels, alors :

On a $\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} b_i c_j = (\sum_{i=1}^{n} b_i)(\sum_{j=1}^{p} c_j)$

Demonstration: $\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} b_i c_j = (\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{p} b_i\, c_j)$

$= (\sum_{i=1}^{n} b_i(\sum_{j=1}^{p} c_j \quad)$

$= (\sum_{i=1}^{n} b_i)(\sum_{j=1}^{p} c_j)$

b) Sommes sur un triangle

On a: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} \ = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} a_{i,j}$

Démonstration : $1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq i \Leftrightarrow 1 \leq j \leq i \leq n \Leftrightarrow 1 \leq j \leq n \text{ et } j \leq i \leq n$

Exercice : Soit n$\in \mathbb{N}^*$, calculer : $S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j}$

$S = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} 1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \times j$

$S = \sum_{j=1}^{n} 1 = n$

II. Coefficients binomiaux

0) Rappels :

Pour n entier naturel non nul, on définit : n ! = = 1× … ×n = $\prod_{k=1}^{n} k$

Et on précise que 0 ! = 1

1) Définition

Etant donné deux entiers naturels n et p, on appelle coefficient binomial « p parmi n », et on note $\binom{n}{p} = \frac{1}{p!}\prod_{k=0}^{p-1}(n-k)$

Si p>n, alors $\binom{n}{p} = 0$, de même pour p<0, $\binom{n}{p} = 0$

Remarque : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Remarque n°2 : De façon combinatoire, $\binom{n}{p}$ correspond au nombre de façons de choisir p objets parmi n…

2) Propriétés

a) Pour tout (n,p)$\in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, on a : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

Démonstration : Evidente du point de vue combinatoire pour p positif!!! et pour p négatif, les deux termes sont nuls…

b) Relation de Pascal

Pour tout (n,p)$\in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$, on a : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$

Démonstration : On distingue p négatif, p = 0 et p$\in [\![1, n]\!]$

Pour p$\in [\![1, n]\!]$, $\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} = \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p+1)!}$

$\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} = \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} + \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{(n-p+p)(n-1)!}{p!(n-p)!} =$

$\frac{n!}{p!(n-p)!}$

c) Formule du binôme de Newton

Etant donné (a,b)$\in \mathbb{R}^2$, et n$\in \mathbb{N}$, on a : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$

Remarque : De façon totalement symétrique : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$

Démonstration : En exercice (par récurrence en utilisant la formule de Pascal)

Exercice : # Développer $(a+b)^5$

Calculer : $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$

On utilise le binôme de Newton :

$(a+b)^5 = a^5+5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ (Remarque, on utilise le triangle de Pascal afin de calculer facilement les coefficients binomiaux)

Soit S = $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 1^p 1^{n-p} = (1+1)^n = 2^n$

III. Petits systèmes linéaires…

Un système linéaire de n équations à p inconnues, est la donnée de n équations linéaires à p inconnues.

La résolution d'un système de deux équations à deux inconnues, vue dans le secondaire en est un cas particulier. Trois méthodes ont été vues alors : une méthode par substitution, une méthode par combinaison et une méthode graphique (en interprétant les équations comme des équations de droites). Nous abordons ici la méthode du « pivot de Gauss » qui généralise la méthode par combinaison.

Le principe : On transforme un système linéaire en système plus simple à l'aide de 3 types d'opérations élémentaires :

L'ajout à une ligne d'un multiple d'une autre ligne, notée : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$

Multiplication d'une ligne par un réel non nul, notée : $L_j \leftarrow \alpha L_j$

Echange de 2 lignes, notée $L_j \leftrightarrow L_j$

4 cas de figures peuvent se présenter :

1) Obtention d'une unique solution

   On souhaite résoudre le système (S) : $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$

   Terminologie : En conservant le coefficient 2 de la première équation, on dit qu'il a été choisi comme pivot.

   Soit : $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 = 2 \quad E_2 \leftarrow E_1 + E_2 \\ 3x_2 - 6x_3 = -3 \quad E_3 \leftarrow 2E_1 - E_3 \end{cases}$

   Puis : $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -2 \\ -3x_3 = 3 \end{cases}$

   Et : $x_3 = -1$, puis $x_2 = -3$ et $x_1 = -2$, triplet qui est bien solution du système S.

2) Obtention d'une infinité de solutions

   On souhaite résoudre le système (S) : $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

   Si on exprime les solutions en fonction d'une des 3 inconnues par exemple x_3, alors cette inconnue est dite secondaire.

   Ainsi S : $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \; E_2 \leftarrow E_1 + E_2 \end{cases}$

   Soit : $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$, et $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_2 = x_3 - 2 \end{cases}$

   Finalement : $x_1 = \frac{3+x_3}{2}$; $x_2 = x_3 - 2$ et $x_3 \in \mathbb{R}$

3) Système incompatible

   On souhaite résoudre le système (S) : $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ -4x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases}$

   On constate que l'une des équations équivalentes ne sera pas vérifiée.

4) Cas particulier des systèmes de 2 équations à 2 inconnues

   a) Pour un système de 2 équations à 2 inconnues : $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$

      On appelle déterminant du système la quantité ad-bc

   b) Propriété

      Un système linéaire de deux équations à deux inconnues possède une unique solution si et seulement si son déterminant est non nul.

Exercice : On considère le système $\begin{cases} \alpha x + 3y = -3 \\ 2x + y = \beta \end{cases}$ suivant, dépendant de 2 paramètres réels α et β, discuter le nombre de solutions de ce système et donner les solutions potentielles.

Le déterminant du système est α-6

1er cas : Si $\alpha \neq 6$

Si $\alpha = 0$, alors de façon évidente y = -1 et x = $\frac{\beta+1}{2}$

Si $\alpha \neq 0$, $\begin{cases} \alpha x + 3y = -3 \\ 2x + y = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha x + 6y = -6 & E_1 \leftarrow 2E_1 \\ 2\alpha x + \alpha y = \alpha\beta & E_2 \leftarrow \alpha E_2 \end{cases}$

D'où : y = $\frac{-6-\alpha\beta}{6-\alpha}$, et de même on calcule x = $\frac{3\beta+3}{6-\alpha}$

2ème cas : Si $\alpha = 6$

Si β = -1, le système est équivalent à : $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$, et tout couple de réels (x,y) est solution.

Sinon, le système est équivalent à : $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 2x + y = \beta \end{cases}$ et il n'y a aucune solution.

IV. Quelques éléments et outils supplémentaires…

1) Valeur absolue

On définit la valeur absolue d'un réel x notée $|x|$ par : $\begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ sinon} \end{cases}$

Démontrer que : pour tout x, y réels $|xy| = |x||y|$
Démontrer l'inégalité triangulaire : $|x + y| \leq |x| + |y|$
Démontrer : $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$

Pour tout x, y réels $|xy| = |x||y|$: Il suffit de distinguer les cas selon les signes de x et de y.

Pour $|x + y| \leq |x| + |y| \Leftrightarrow |x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 \Leftrightarrow$xy$\leq |xy|$ qui est toujours vraie.

Enfin : $|x| = |x + y - y| \leq |x + y| + |y|$ d'où : $|x| - |y| \leq |x + y|$, l'autre inégalité s'obtient en échangeant les variables x et y, d'où le résultat…

2) Division euclidienne de polynômes

Effectuer la division euclidienne de $2X^4 - 2X^3 + 2X^2 + 1$ par X^2+X+3

3) Factorisation

Soit $P(x) = x^3-x^2-x+1$

a) Vérifier que -1 est racine de P
b) En déduire par deux méthodes différentes la factorisation de P