Fiche d'exercices sur « Applications linéaires »

Exercice n°1

Soit f : E→F et g :F→G deux applications telles que f est linéaire et surjective et gof est linéaire, montrer que g est linéaire.

Exercice n°2

Soit E un $\varkappa$-espace vectoriel, f et g deux endomorphismes de E.

Montrer que si fog = gof alors Imf et Kerf sont stables par g

Exercice n°3 « hyper classique »

Soit E un $\varkappa$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E.

1) Quelle relation existe-t-il entre Kerf et Kerf^2 ?
2) Quelle relation existe-t-il entre Imf et Imf^2 ?
3) Montrer que Kerf^2 = Kerf⇔Imf⋂Kerf = {0}
4) Montrer que Imf^2 = Imf⇔E = Kerf+Imf
5) En déduire que : [Kerf = Kerf^2 et Imf^2 = Imf] ⇔E = Imf⊕Kerf

Exercice n°4

Soit E un $\varkappa$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E, tel que f^2 - 3f + 2Id$_E$ = 0

1) Montrer que f est un automorphisme et exprimer f^{-1} en fonction de f et Id$_E$
2) Montrer que Ker(f-Id$_E$) et Ker(f-2Id$_E$) sont supplémentaires dans E.

Exercice n°5

Soit E un $\varkappa$-espace vectoriel, f et g deux endomorphismes de E, tels que fog = Id$_E$

1) Montrer que Kerf = Ker(gof)
2) Montrer que Img = Im(gof)
3) Calculer (gof)^2
4) En déduire que Img et Kerf sont supplémentaires dans E.

Exercice n°6

Soit E un $\varkappa$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E tel que pour tout vecteur x de E, les vecteurs x et f(x) soient colinéaires. Montrer que f est une homothétie.

Exercice n°7

Soit f l'application définie de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], f\big(P(X)\big) = (P(-1), P(0), P(1))$

Montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^3$

Exercice n°8

Dans le $\varkappa$-espace vectoriel, $E = \varkappa^3$, on considère les sous- espaces vectoriels F$_1$ = Vect((1,0,0) ;(0,1,0)) et F$_2$ = Vect((1,1,1))

1) Montrer que F$_1$ et F$_2$ sont supplémentaires dans E.
2) Vérifier qu'il existe un endomorphisme u de E tel que :$\forall(a,b) \in \varkappa^2, u\big((a,b,0)\big) = (-b,a,0)$ et :$\forall c \in \varkappa$, u((c,c,c)) = -(c,c,c)
3) Prouver que u^4 = Id$_E$

Exercice n°9

Soient p et q deux endomorphismes d'un $\varkappa$-espace vectoriel E.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) p et q sont deux projecteurs ayant même noyau
(ii) poq = p et qop = q

Exercice n°10

Montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire de $\mathbb{R}^5$ vers $\mathbb{R}^3$ dont le noyau soit une droite vectorielle.

Exercice n°11

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie paire (n=2p)

Montrer que : $[f^2 = 0$ et $rg(f) = p] \Leftrightarrow [Imf = Kerf]$

Exercice n°12

Soit un espace vectoriel de dimension finie, et soit u un endomorphisme de E

Montrer que $rg(u^2) = rg(u)$ si et seulement si Im(u) et Ker(u) sont supplémentaires dans E.

Exercice n°13

Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels de dimension finie.

Soit $u \in L(E,F)$ et $v \in L(F,G)$

1) En appliquant la formule du rang à la restriction de v à Im(u), montrer que $rg(u) = rg(vou) + \dim(Im(u) \cap Ker(v))$
2) En déduire que $rg(vou) \geq rg(v) + rg(u) - \dim(F)$

Exercice n°14

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n, et f un endomorphisme de E.

On suppose f nilpotent d'indice n (c'est-à-dire $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$)

Montrer qu'il existe a dans E tel que : $(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$ soit une base de E.

Exercice n°15

Soit $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \to \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z)$

1) Montrer que p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$
2) Déterminer Ker(p)
3) L'application p est-elle injective ?
4) Déterminer Im(p)
5) L'application p est-elle surjective ?
6) A-t-on $\mathbb{R}^3 = Kerp \oplus Im(p)$
7) Est-ce que p est un projecteur de $\mathbb{R}^3$?

Exercice n°16

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n, et u un endomorphisme de E.

1) Montrer qu'il existe p∈ $[\![0, n]\!]$, tel que Ker(u^{p+1}) = Ker(u^p)
2) Montrer que $\forall k \geq p, Ker(u^k) = Ker(u^p) et\ Im(u^k) = Im(u^p)$
3) Montrer que E = $Ker(u^p) \oplus Im(u^p)$

Exercice n°17

Soit f : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, (x,y,z) →(2x-y+z,x-y-z,x+2z)

1) Montrer que f est linéaire
2) Déterminer une base de kerf
3) Déterminer une base de Imf
4) A-t-on f endomorphisme injectif ? surjectif ?
5) A-t-on $\mathbb{R}^3$ = Kerf⊕Imf ?

Exercice n°18

1) Soient u_1=(1,1,0), u_2=(0,1,1) et u_3=(1,0,1), montrer que (u_1,u_2,u_3) est une base $\mathbb{R}^3$
2) Soit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : f(u_1)=(1,2,3), f(u_2)=(3,2,1) et f(u_3)=(7,2,-3)
   a) Déterminer une famille génératrice de Imf
   b) Déterminer la dimension de Im(f)
3) Déterminer Ker(f)

Exercice n°19

Soit E=$\mathbb{R}_n[X]$, et f : E⟶E, définie par f(P(X))=P(X)+(1-X)P'(X)

1) Montrer que f est linéaire
2) Donner une base de Ker(f)
3) Donner une base de Im(f)

Exercice n°20 (oraux concours)

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique et on considère les applications f et g définies par :

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -5x - y + z \\ 3x + y + z \\ 2x + y + 2z \end{pmatrix} \quad \text{et } g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 6x + 18y - 12z \\ -2x - 6y + 4z \\ -3x - 9y + 6z \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base de $Kerf$.
2. En déduire la dimension de Imf ainsi qu'une base de Imf.
3. Déterminer une base de $Kerg$.
4. Montrer que $Imf \subset Kerg$.
5. Que peut-on en déduire ?
6. Montrer que $f \circ g$ est un endomorphisme nilpotent.

Exercice n°21 **(lycée Wallon)**

1. Montrer que $P = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ est un plan vectoriel.
2. Soient $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ et la droite vectorielle $D = \mathrm{Vect}_{\mathbf{R}}(\vec{e}_1)$.
   Montrer que P et D sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbf{R}^3$.
3. Soit $p : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la projection sur P parallèlement à
   Déterminer l'expression de $p(\vec{u})$ quel que soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.
   Comment en déduire la projection q sur D parallèlement à P ?
4. Déterminer la symétrie $s : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ par rapport à D parallèlement à P.