Feuille d'exercices sur « Calcul intégral »

Exercice n°0

Soit la fraction $F = \frac{1}{X(X+1)}$

1) Réaliser la décomposition en éléments simples.
2) En déduire une simplification pour n supérieur ou égal à 1 de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$
3) Même question avec $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

Exercice n°1

Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f([0,1]) \subset [a,b]$ et $\int_0^1 f = 0$

En remarquant que $(f-a)(b-f)$ est une fonction positive, montrer que $\int_0^1 f^2 \leq -ab$

Exercice n°2

Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ telle $\int_0^1 f = 0$

1) Démontrer que f s'annule au moins une fois.
2) On suppose de plus que : $\int_0^1 tf(t)dt = 0$, démontrer que f s'annule au moins deux fois. (On pourra raisonner par l'absurde en affirmant que f ne s'annule qu'une seule fois et considérer $\int_0^1 (t - t_0)f(t)dt$ pour un réel t_0 de [0,1] bien choisi…)

Exercice n°3

1) Etudier la fonction $f : x \to \mathrm{sh}(x)$
2) Démontrer que f admet une réciproque sur $\mathbb{R}$
3) Déterminer $(f^{-1})'(x)$ en fonction de x
4) Soit $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$, à l'aide d'une mise sous forme canonique, d'un changement de variable, et des questions précédentes, calculer I.
5) Calculer $J = \int_0^1 \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x^2+x\sqrt{x^2+1}+1} dx$

Exercice n°4 **(Lycée Wallon)**

Exercice 23 On pose pour tout entier naturel n, $I_n = \int_1^e \ln^n(x)\,dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Établir une relation liant I_n et I_{n+1}.
3. En déduire que pour tout entier naturel n, $0 < I_n < \frac{e}{n+1}$.
4. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} nI_n = e$.

Exercice n°5

1) En procédant par IPP, calculer :
   a) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin(t)\,dt$
   b) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{t}{\cos^2(t)}\,dt$

c) $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos(t) dt$

2) En procédant à des changements de variables, calculer :

a) $I_4 = \int_0^1 \frac{1}{(2t-3)^5} dt$

b) $I_5 = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{-3t+4}} dt$

Exercice n°6

1) Pour x réel, linéariser $\sin^4 x$
2) En déduire les primitives de $x \to \sin^4 x$

Exercice n°7

1) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)} dx$
2) a) Calculer $\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+3} dx$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+2nk+3n^2}$

3) Calculer $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)-\ln(x)}{x^2} dx$ *(on posera* $y=\frac{1}{x}$*)*

Exercice n°8

Pour n entier naturel, on définit la suite $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$

1) Montrer que cette suite est positive et décroissante
2) Expliquer pourquoi cette suite converge
3) Démontrer que $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$
4) Démontrer que $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$
5) En déduire la valeur de la limite.

Exercice n°9

Pour n entier naturel non nul, on définit : $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^n} dx$ et $J_n = \int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{1+x^n} dx$

1) Justifier l'inégalité : $0 \leq I_n \leq J_n$
2) Justifier l'inégalité : $0 \leq J_n - I_n \leq \frac{1}{2n(2n+1)}$
3) A l'aide d'un changement de variable, calculer J_n (on remarquera que $x^{2n-1} = x^n x^{n-1}$)
4) Déduire des questions précédentes $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_n}{J_n}$

Exercice n°10

1) a) Montrer que pour k entier non nul, $\frac{1}{\sqrt{k+1}} < \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} < \frac{1}{\sqrt{k}}$

b) En déduire que pour tout entier naturel n≥2, on a : $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t}} < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$

2) Montrer que pour tout n>0, $2\sqrt{n} - 2 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 1$

Exercice n°11

Pour n entier, on pose $f : x \to \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) On définit sur $\mathbb{R}$, la fonction h : $x \to \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$, exprimer pour $x \neq 0$, $h(\frac{1}{x})$ en fonction de h(x).

3) En déduire pour $x \neq 0$, une relation entre f(1), $f(\frac{1}{x})$ et f(x)

4) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ en fonction de f(1)

Exercice n°12

Déterminer les limites des suites définies par le terme général suivant :

1) $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$
2) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$
3) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$

Exercice n°13

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1) $R(X) = \frac{1}{X^2-X-2}$
2) $S(X) = \frac{2X}{X^2+X+1}$
3) $T(X) = \frac{X^4+X^2+2}{X^3+5X^2+8X+4}$

Exercice n°14

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2(x)cos^3(x)dx$

Exercice n°15

Soit $T > 0$ et f une fonction, continue et T périodique sur $\mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_x^{x+T} f(t)dt - \int_0^T f(t)dt$. Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer F ′. En déduire que l'intégrale de f sur une période est constante.

Exercice n°16 (oraux concours)

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\varphi(t) = \frac{\text{sh}t}{t} \text{ pour } t \neq 0 \text{ et } \varphi(0) = 1$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que f est bien définie et étudier la parité de f.
b) Justifier que f est dérivable et calculer $f'(x)$.
c) Dresser le tableau de variation de f.

Exercice n°17 (oraux concours)

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On désire déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0 de la fonction $f_n : x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}$.
a) Justifier l'existence et l'unicité de la fonction cherchée. Celle-ci est désormais notée F_n.
b) Calculer $F_1(x)$.
c) En procédant au changement de variable $x = \tan\theta$, déterminer $F_2(x)$.
d) En s'aidant d'une intégration par parties, former une relation de récurrence entre $F_{n+1}(x)$ et $F_n(x)$.
e) Calculer $F_3(x)$.