Fiche d'exercices : **« Relation de comparaison »**

Exercice n°1

Montrer que $x^2\sin(\frac{1}{x}) =_{x\to 0} o(x)$

Exercice n°2

Donner un équivalent lorsque x tend vers $+\infty$ de $\sqrt{x^3 - 2x^2 + x + 3}$

Exercice n°3

Donner un équivalent de $\frac{(e^x-1)^2}{(1+x)^5-1}$ au voisinage de 0.

Exercice n°4

Donner un équivalent en 0 de $\mathrm{ch}x - \cos(x)$

Exercice n°5

1) Trouver un équivalent simple de la suite définie par $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$
2) Trouver un équivalent simple de la suite définie par $v_n = e^{1/n} - e^{1(n+1)}$

Exercice n°6

Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k! \sim n!$

Exercice n°7

Trouver un équivalent de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul, $u_n = \prod_{k=n^2+1}^{n^2+n} \frac{2k-1}{k}$

Exercice n°8

Soient f et g deux fonctions à valeurs strictement positives tendant vers $+\infty$ en a, et telles que $f\sim_a g$, montrer que $\ln(f) \sim_a \ln(g)$

Exercice n°9

Déterminer, à l'aide d'équivalents, les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + sinx)^{1/x}$
2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-e^x)(1-cosx)}{3x^3+2x^4}$

Exercice n°10

1) Pour k entier naturel non nul, montrer que : $\frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$
2) En déduire un équivalent simple de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Exercice n°11

1) Montrer que $\ln(\ln(x)) = =_{x\to\infty} \ln(x)$
2) En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{lnx}{x})^{1/x}$

Exercice n°12

Soit u une suite décroissante de limite 0 telle que : $u_n+u_{n+1} \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$

1) On note $a_n = n(u_n+u_{n+1})$, montrer que la suite a est convergente et déterminer sa limite.
2) Montrer que pour entier naturel supérieur ou égal à 2, on a : $a_n \leq 2nu_n \leq \frac{n}{n-1}a_{n-1}$
3) Conclure !

Exercice n°13

Montrer que $E(x) \sim_{+\infty} x$

Exercice n°14

Trouver un équivalent en 0 de $x \to \cos(\sin x)$

Exercice n°15

Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ à la fonction $x \to \ln(x^2+1) - \ln x$.

Exercice n°16

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que l'équation $x - \ln x = n$ admet une unique solution u_n dans $[1, +\infty[$.
2) Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$
3) Montrer que $u_n \sim n$ et que : $u_n - n \sim \ln n$.

Exercice n°17

Soit $a \in \mathbb{R}$. Le but de cet exercice est de montrer que $e^{an} \underset{+\infty}{=} o(n!)$

Pour cela on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = e^{an}$ et $v_n = n!$

1. Démontrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}\frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

2. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq C\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} v_n$.
3. Conclure.

Exercice n°18

Simplifier au maximum les expressions suivantes (en restant le plus précis possible), les o et O sont pour n tendant vers ∞ :

1) $-2O(e^{-n})+o(e^{-n})$ 2) $\frac{1}{n^3} + o(\frac{1}{n})$ 3) $o(n^2)+o(n^3)$

Exercice n°19

Simplifier au maximum les expressions suivantes (en restant le plus précis possible), les o et O sont pour x tendant vers 0 :

1) $1+\frac{1}{x}-x^2+o(x-x^2)$ 2) $\frac{1}{x^2} + 1 - x + o(\frac{1}{x})$