Fiche d'exercices : Calcul différentiel

Exercice n°1

1) Que dire de la parité de la dérivée d'une fonction paire et dérivable sur $\mathbb{R}$?
2) La dérivée d'une fonction périodique sur $\mathbb{R}$ est-elle périodique sur $\mathbb{R}$?

Exercice n°2

1) Démontrer que la fonction sh définit une bijection dérivable de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, soit f^{-1} sa réciproque.
2) Démontrer que f^{-1} est dérivable
3) Donner une expression de $f^{-1}{}'(x)$

Exercice n°3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1) Démontrer que si f est dérivable en 0, alors : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(-x)}{2x} = f'(0)$
2) Si la limite précédente est finie, peut en déduire que f est dérivable en 0 ?

Exercice n°4

Etudier la dérivabilité de la fonction h définie par : $h(x) = \frac{1}{1+|x|}$

Exercice n°5 (oraux de concours)

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = (x+1)\ln(x) - 2(x-1)$$

(a) Justifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f''(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

(b) En déduire le signe de f' et les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$. Dresser le tableau de variations de f et calculer $f(1)$.

(c) Conclure que :

$$\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[, \qquad \frac{x+1}{x-1}\ln(x) \geqslant 2$$

On distinguera les cas $x \in]0,1[$ et $x \in]1,+\infty[$.

Exercice n°6

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et $n \geq 2$ un entier.

On suppose que f s'annule au moins n fois.

Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet au moins n-1 solutions réelles distinctes.

Exercice n°7

Démontrer que la fonction $x \to x - \sin(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Exercice n°8

Soit h la fonction de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, $x \to x^2\tan(x)$

Déterminer les extrema locaux et globaux de h.

Exercice n°9

Montrer que : $\lim\limits_{n\to\infty} (\sin(\sqrt{n+1}) - \sin(\sqrt{n})) = 0$

Exercice n°10

Soit α un réel supérieur ou égal à 0.

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ pour tout entier n.

Montrer que la suite (u_n) converge.

Exercice n°11

Montrer que la fonction f : [-1 ;1] → $\mathbb{R}$, x→Arcsin(1-x^2) n'est pas dérivable en 0.

Exercice n°12

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I d'intérieur non vide.

Soient a et b deux éléments de I tels que a<b, et f ’(a)<0 et f ’(b)>0, le but de l'exercice est de montrer qu'il existe c∈[a ;b] tel que f ’(c) = 0

1) Soit $\varphi_a(x) = \begin{cases} f'(a) si\ x = a \\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ sinon \end{cases}$, montrer que φ_a est continue.
2) En déduire que φ_a([a,b]) est un intervalle.
3) Procéder de même avec $\varphi_b(x) = \begin{cases} f'(b) si\ x = b \\ \frac{f(x)-f(b)}{x-b}\ sinon \end{cases}$
4) En déduire que : φ_a([a,b])∪ φ_b([a,b]) est un intervalle.
5) En déduire que : $\forall k \in]f'(a), f'(b)[$, $\exists c$ tel que f ‘(c) = k
6) Conclure !

Exercice n°13

Soient a et b deux réels tels que a<b, soit f une fonction dérivable sur [a ;b] avec f(a) = f(b) et

f ’(a) = 0, démontrer qu'il existe c ∈]a ;b[tel que : f ’(c) = $\frac{f(c)-f(a)}{c-a}$ (avec φ(x) = $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$)

Exercice n°14

Soient a et b deux réels tels que a<b, soient f et g deux fonctions continues sur [a ;b], dérivables sur]a,b[, démontrer qu'il existe c ∈]a,b[tel que : (f(b)-f(a))g’(c) = (g(b)-g(a))f ’(c)

Ind. Poser φ(x) = (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f (x)

Exercice n°15 **(devoir commun INP 2025)**

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sin(x)+\cos(x)}{1+\cos^2(x)}.$$

Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]a, a+2\pi[$.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x)-f(y)| \leqslant |x-y|^3.$$

Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°16 (oraux de concours)

On rappelle que la fonction tangente hyperbolique est définie sur $\mathbb{R}$ par le quotient $\text{th} = \dfrac{\text{sh}}{\text{ch}}$.

1. (a) Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \text{th}(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$
   (b) Soit $y \in]-1,1[$. Résoudre l'équation $\text{th}(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On note φ la fonction d'expression :
$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

2. (a) Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_\varphi$ de φ.
   (b) Étudier la parité de φ sur son domaine de définition.
   (c) Étudier les variations de φ sur $\mathscr{D}_\varphi$ et dresser son tableau de variations (*on calculera les limites aux bornes du domaine de définition*).
3. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(\text{th}(x)) = x$$

Exercice n°17

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2\sin(\frac{1}{x})$

1) Démontrer que f admet un prolongement par continuité en 0 (on note toujours f ce prolongement)
2) Démontrer que f est dérivable en 0.
3) Calculer pour tout x réel non nul, f '(x)

Exercice n°18

Soient a et b deux réels tels que a<b, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, on suppose que f est convexe sur [a,b] et que f(a) = f(b)

Montrer que pour tout réel x de [a,b], on a $f(x) \leq f(a)$

Exercice n°19

1) Soit f une fonction convexe sur un intervalle I borné, montrer que f est minorée.
2) Soit f une fonction strictement monotone d'un intervalle I sur un intervalle J, que peut-on dire de f^{-1} ?
3) Si f et g sont deux fonctions convexes, positives de même monotone sur un intervalle I, montrer que si f et g sont 2 fois dérivables sur I, alors fg est convexe sur I.

Exercice n°20

Soient a et b deux réels positifs.

Soit p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Montrer, l'inégalité de Holder, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ (utiliser la concavité de ln)

Exercice n°21

Soit f une fonction convexe définie sur [A,+∞[croissante, et non constante, montrer que $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

Exercice n°22

Soient x et y deux réels strictement supérieurs à 1.

Montrer que $(\ln(\sqrt{x}))^2 + (\ln(\sqrt{y}))^2 \geq 2\ln(\sqrt{x})\ln(\sqrt{y})$

Montrer que $\ln(\frac{x+y}{2}) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$ (utiliser la concavité de $x \to \ln(x)$ sur $]1,+\infty[$

Exercice n°23

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-E(x))(x-E(x)-1)$

Etudier la dérivabilité de g.

Exercice n°24

Soit $f : [\frac{\pi}{2}, \pi[\to \mathbb{R}, x \to \frac{1}{\sin(x)}$. Montrer que pour tout x de $]1,\infty[$, $(f^{-1})'(x)$ existe et déterminer son expression en fonction de x (attention à l'expression de f^{-1} sur $[\frac{\pi}{2}, \pi[$)

Exercice n°25

Soit f de I dans $\mathbb{R}$, dérivable, et telle que pour a et b dans I avec $a<b$, f ne s'annule pas sur $]a,b[$, et telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que $f'(a)f'(b) \leq 0$

Exercice n°26 (oraux concours)

En appliquant un théorème des accroissements finis à la fonction $x \longmapsto \ln(\ln(x))$ sur les intervalles $[k, k+1]$ pour $k \in [\![2, n]\!]$, montrer que : $\ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leq \frac{1}{k\ln(k)}$.

En déduire la limite lorsque $n \to +\infty$ de $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$.

Exercice n°27

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$

Pour tout entier naturel n, on pose : $P_n(x) = \frac{D^n(f^n)}{2^n n!}$ Où D^n désigne l'opérateur de dérivée nième.

1) Démontrer que P_n a la parité de n.
2) Calculer $P_n(1)$
3) En déduire $P_n(-1)$

Exercice n°28

Soit f la fonction définie par : $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \to x^2 E(\frac{1}{x})$

1) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2) Ce prolongement est-il dérivable en 0 ?

Exercice n°29 (oraux de concours)

Calculer de deux façons la dérivée $n$ème de $x \mapsto x^{2n}$.
En déduire une expression de

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Exercice n°30

Soit a un réel strictement positif.

1. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction cosinus hyperbolique, sur l'intervalle $[0, a]$, avec le reste à l'ordre 5.

2. Montrer que $0 \leq \mathrm{ch}(a) - 1 - \frac{a^2}{2!} - \frac{a^4}{4!} \leq \frac{a^5}{5!}\mathrm{sh}(a)$

Exercice n°31

Définition 2.6 (Fonction lipschitzienne)

Soit $M \geqslant 0$. On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I est M-**lipschitzienne** si $\forall (x, y) \in I^2$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M\,|x - y|\,.$$

Montrer qu'une fonction g de classe C^1 sur un segment [a, b] est lipschitzienne.

Exercice n°32 (voir le n°31 avant !)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t)=e^{-t}+t^2$

1) Montrer que g est lipschitzienne sur [0,1] (expliciter le rapport de Lipschitz)
2) La fonction g est-elle lipschitzienne sur $\mathbb{R}$?

Exercice n°33 (oraux de concours)

1. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral en 0 à l'ordre 3 pour l'exponentielle.
2. Donner un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 3 tel que, pour tout x de $[0, 1]$, $|e^x - P(x)| \leq (e-1)/6$.
3. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral en 0 à l'ordre n pour l'exponentielle, et en déduire l'existence d'un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n vérifiant :

$$\forall x \in [0, 1], |e^x - P_n(x)| \leq (e-1)/n!$$