Fiche d’exercices sur DL

Exercice n°1

1) Déterminer le développement limité à l’ordre 3 en 0 de la fonction : x→ $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$
2) Déterminer le développement limité à l’ordre 3 en 0 de la fonction : x→ $e^x + \ln(1+x)$
3) Déterminer le développement limité à l’ordre 2 en 0 de la fonction : x→ $e^x(1+x)^{1/3}$
4) Déterminer le développement limité à l’ordre 4 en 0 de la fonction : x→ $\frac{1}{\cos(x)}$

Exercice n°2

1) Déterminer le développement limité à l’ordre 2 en $\frac{\pi}{3}$ de la fonction : x→cos(x)
2) Déterminer le développement limité à l’ordre 2 en 0 de la fonction : x→ $e^{\sqrt{1+x}}$
3) Déterminer le développement limité à l’ordre 3 en 0 de la fonction : x→ln(1+cos(x))

Exercice n°3

1) Déterminer le développement limité à l’ordre 4 en 0 de la fonction : x→ $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$
2) Déterminer le développement limité à l’ordre 3 en 0 de la fonction : x→ $\frac{x^2+1}{x^2+2x+2}$
3) Déterminer le développement limité à l’ordre 4 en 0 de la fonction : x→$\ln(\frac{1}{\cos(x)})$
4) Déterminer le développement limité à l’ordre 3 en 0 de la fonction : x→ $\frac{1}{(x+1)(x-2)}$

Exercice n°4

1) Déterminer le développement limité à l’ordre 3 au point 2 de la fonction : x→ $\sqrt{x}$
2) La fonction admet-elle un DL d’ordre n≥1 en 0 ?

Exercice n°5

Au voisinage de 0, étudier la position de la courbe représentative de la fonction f : x→ $\frac{1}{1+e^x}$ par rapport à sa tangente.

Exercice n°6

Soit f :$\mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$, x→ $x^{1+\frac{1}{x}}$

1) Montrer que $f(x) \sim_{\infty} x$
2) Déterminer un développement asymptotique à trois termes de f.
3) Etudier la branche en $+\infty$

Exercice n°7

Montrer que la fonction f : x→ $\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $]-\pi;\pi[$

(Il est conseillé de réduire au même dénominateur et pour f et pour f ’. Au fait, est-ce que le DL de f permet d’obtenir celui de f ’ ?)

<u>Exercice n°8</u> (oraux concours)

1/ Soit $n \in \mathbf{N}$, montrer que l'équation :

$$\ln(x) + x = n \ (*)$$

admet une unique solution $x_n \in \mathbf{R}_+^*$.
2/ Étudier la monotonie de la suite (x_n), puis déduire sa limite.
3/ Déterminer un équivalent de x_n.
4/ Donner un développement asymptotique à deux termes de x_n.
En déduire que $e^{x_n} \sim \dfrac{e^n}{n}$.

<u>Exercice n°9</u>

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 1 de la fonction : $x \to \text{Arctan}(x)$

<u>Exercice n°10</u>

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction f.

<u>Exercice n°11</u>

1) Soit $f : x \to \frac{x^3}{1+x^6}$ déterminer $f^{(n)}(0)$ pour $n \in \mathbb{N}$
2) Soit $g : x \to \frac{\ln(cos x)}{1+x}$ définie sur $]-1\,;1[$. Déterminer $f'(0)$ et $f''(0)$

<u>Exercice n°12</u>

Pour tout entier naturel n, on donne $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$

1) Montrer que (I_n) tend vers 1
2) Montrer que $I_n - 1 \sim_\infty O(\frac{1}{n})$
3) A l'aide d'une IPP (*sur I_n-1*), montrer que $I_n = 1 - \frac{ln2}{n} + o(\frac{1}{n})$

<u>Exercice n°13</u> (INP 2025)

Soit la fonction f définit sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \longmapsto \dfrac{x^2}{\text{sh}(x)}$.

1. Démontrer que f peut être prolongée par continuité en 0.
Dans la suite de l'exercice, on notera encore f la fonction ainsi prolongée.
2. Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.
3. Que peut-on déduire de la question précédente concernant :
La dérivabilité de f en 0, l'équation d'une éventuelle tangente en 0 et sa position relative par rapport à la courbe représentative de f au voisinage de 0 ?

<u>Exercice n°14</u>

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la fonction définie par *$f(x) = xch(x)$*

1) Montrer que f est bijective
2) Soit g sa réciproque, justifier que g admet un DL à l'ordre 5 en de la forme :
   $g(u) = a_1u + a_3u^3 + a_5u^5 + o(u^5)$
3) Déterminer ce développement en exploitant *gof*

Exercice n°15 (oraux concours)

On considère $f : x \mapsto \sqrt{x^4 + x^2 + 2x + 1}$.
Prouver que f admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ et déterminer la position de la courbe de f par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice n°16 (oraux concours)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x} - 1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 1 de $\ln(\sqrt{x})$.
   On pourra poser $x = 1 + h$.
3. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 1 de $\sqrt{x} - 1$.
4. En déduire le développement limité à l'ordre 2 de f en 1.
5. Que peut-on dire sur la courbe représentative de f au voisinage du point d'abscisse 1 ?

Exercice n°17 (INP 2024)

On cherche à étudier la fonction f définie à l'aide d'une fonction auxiliaire g comme suit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} g\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

avec $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t}{\operatorname{ch}(t)} \end{array}$.

On rappelle que les fonctions trigonométriques hyperboliques ch, sh et th sont définies sur $\mathbb{R}$ par : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad \operatorname{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \qquad \operatorname{th}(t) = \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)}.$$

Partie I. Préliminaires : étude de g.

1. (a) Rappeler le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $t \mapsto e^t$ et en déduire celui de $t \mapsto \operatorname{ch}(t)$.
   (b) Sans chercher à calculer la dérivée de g, montrer que la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de g admet une tangente T d'équation $y = t$ au point d'abscisse $t = 0$.
   (c) Quelle est la position relative de $\mathscr{C}_g$ par rapport à T au voisinage de 0 ?
2. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   $$g'(t) = \frac{\operatorname{ch}(t) - t\operatorname{sh}(t)}{(\operatorname{ch}(t))^2}.$$
3. Étudier la parité de g.
4. On considère $h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t} - \operatorname{th}(t) \end{array}$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $h(\alpha) = 0$.
   (b) Montrer que $\alpha > 1$.
   (c) Montrer que g' et h sont de même signe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice n°18 (DS 2025)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$

1) Déterminer le domaine de définition de f et justifier que f y soit dérivable.
2) Montrer que f se prolonge par continuité en 0, préciser la valeur de f(0). *Par abus de langage, on continuera à noter f le prolongement ainsi obtenu.*
3) Déterminer le DL à l'ordre 2 de f en 0
4) Justifier que f soit dérivable en 0. Peut-on préciser la valeur de f '(0) ?
5) Déterminer équation de la tangente en 0 et sa position par rapport à la courbe de f.