Fiche d'exercices : Les matrices

A. Autour du calcul matriciel

Exercice n°1

Soit U$\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice dont les coefficients sont égaux à 1. Calculer U^m pour m entier naturel.

Exercice n°2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer AB, BA, A^2-B^2 et (A+B)(A-B)

Exercice n°3

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculer A^2 - A. En déduire que A$\in GL_3(\mathbb{R})$, et donner A^{-1}

Exercice n°4

Soient $(A,B,C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$, Montrer que si ABC = 0, et si deux des trois matrices sont inversibles alors la troisième est nulle.

Exercice n°5

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) On note $J = I_4 - A$, calculer J^2, J^3 et J^4
2) En écrivant $I_4 = I_4^4 - J^4$, montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice n°6

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$

Pour Y$\in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, résoudre AX = Y, en déduire que A est inversible, et calculer son inverse.

Exercice n°7

1) Déterminer toutes les puissances positives de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
2) On considère deux suites réelles définies par u_0, v_0 et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = -u_n$

   Déterminer une expression de u_n et de v_n en fonction de n.

Exercice n°8

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que $AB = A+I_n$, montrer que A est inversible.

Exercice n°9

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer A^n pour tout entier n.

B. Représentation matricielle

Exercice n°1

Soit E un $\varkappa$-espace vectoriel de dimension 3, et soit $u \in L(E)$ tel que $u^3 = 0$ et $u^2 \neq 0$

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice représentative de u soit :
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice n°2

On travaille dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, et on note B_0 la base canoniquement associée.

1) Montrer que la famille : $B = ((X-1)^3 ; (X-1)^2(X+1) ; (X-1)(X+1)^2 ; (X+1)^3)$ est une base de E.
2) Déterminer la matrice de passage M de B_0 à B
3) Calculer M^2
4) En déduire la matrice de passage de B à B_0

Exercice n°3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]\ \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|$

Montrer que A est inversible.

Exercice n°4

Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ avec n entier naturel non nul, on pose

$\Omega = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $MA = BM\}$

1) Montrer que Ω est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
2) A quelle condition Ω contient-il une matrice inversible ?

Exercice n°5

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

1) Calculer A^2
2) En déduire que A est semblable à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
3) Expliciter $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D$

Exercice n°6

Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on considère $\varphi : P \rightarrow (X^2-1)P''+2XP'$

1) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
2) Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$

Exercice n°7

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\varkappa)$, telle que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{tr}(A) = 1$

Montrer que A est la matrice d'un projecteur.

Exercice n°8

Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, on désigne par 0_4 la matrice carrée nulle d'ordre 4.

On suppose que : $A^2 \neq 0_4$ et $A^3 = 0_4$

Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ associé à A.

1) Justifier l'existence de : $x \in \mathbb{C}^4$, tel que $\varphi(x) \neq 0_{\mathbb{C}^4}$
2) Montrer que $(\varphi^2(x), \varphi(x), x)$ est libre
3) Soit a tel que $(\varphi^2(x), \varphi(x), x, a)$ soit une base de $\mathbb{C}^4$, déterminer la matrice B de φ dans cette base. (ind. Penser à évaluer B^3)
4) Quel est le rang de A ? (ind. Penser au rang de B)

Exercice n°9

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$, et $B'(e_1+2e_2+e_3, e_1+2e_2+2e_3, e_2+2e_3)$

On donne la matrice de l'endomorphisme φ : $M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 14 & -10 & 4 \\ 16 & -10 & 3 \end{pmatrix}$

Donner $M_{B'}(\varphi)$

Exercice n°10 (oraux concours)

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $e_1 = (1,1,0)$, $e_2 = (-1,0,2)$ et $e_3 = (3,1,2)$ trois vecteurs de E.

1. Donner l'expression de $f(x,y,z)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$.
3. Vérifier que $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E.
4. Soit A' la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.
   (a) Quelle relation mathématique existe-t-il entre A et A' ?
   (b) Calculer A' de 2 façons différentes.

Exercice n°11 (oraux concours)

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer B^n.
3. On souhaite résoudre le système d'équations : $\begin{cases} -x+y+z & = & 2 \\ 2x-y & = & 3 \\ y-z & = & -1 \end{cases}$
   (a) Ecrire ce système sous forme matricielle à l'aide de la matrice A
   (b) Résoudre le système en utilisant la question 1.

Problème n°1 (Khal lycée Châtelet)

On considère les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A tout nombre réel x on associe la matrice

$$M(x) = I + x.A + \frac{x^2}{2}.A^2$$

1. Calculer A^2 et A^3 et en déduire, pour tout entier $n > 3$, la valeur de A^n.
2. Calculer en utilisant (1) le produit $M(x)M(y)$ et montrer que
$$M(x)M(y) = M(x+y)$$
3. Montrer que pour tout entier positif n : $(M(x))^n = M(nx)$. reconnaître $M(0)$.
4. Ecrire les matrice $M(x)$ et $(M(x))^n$ sous forme explicite.
5. Justifier l'inversibilité de la matrice $M(x)$ sans chercher à calculer son inverse.
6. Déterminer l'inverse de $M(x)$ en n'utilisant que la relation (2)
7. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Écrire sous forme explicite les matrices B^{-1} et B^n.
8. Retrouver la valeur de B^{-1} en utilisant la méthode du pivot.
9. Conclure quant à une structure algébrique de l'ensemble $\{M(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Problème n°2

Exercice 1
On donne les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. CalculerA^2 et montrer qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera tels que $A^2 = aA + bI_3$.
2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_3.
3. Soient (u_n) et (v_n) les deux suites définies par les relations de récurrence :
$$u_0 = 0; \quad v_0 = 1; \quad u_{n+1} = -u_n + v_n; \quad v_{n+1} = 2u_n$$
Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $\quad A^n = u_n A + v_n I_3$.
4.
   (a) On pose $x_n = u_n + v_n$. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $x_n = 1$.
   (b) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $y_n = 2u_n - v_n$.
   Montrer que la suite (y_n) est géométrique et préciser sa raison. Exprimer alors y_n en fonction de n.
   (c) En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.
5. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a
$$A^n = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n\right].A + \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^n\right].I_3$$
Cette formule est-elle encore valable pour $n = -1$?