Fiche exercices sur déterminant

Exercice n°1

Déterminer à chaque fois la forme factorisée du déterminant (on précise que a,b et c désignent 3 réels)

$A = \det\begin{pmatrix} 2a & 2a & a-b-c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ c-a-b & 2c & 2c \end{pmatrix}$ $B = \det\begin{pmatrix} a+b & b+c & a+c \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & a^2+c^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & a^3+c^3 \end{pmatrix}$

$C = \det\begin{pmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{pmatrix}$ $D = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice n°2

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$ avec a,b,et c 3 réels.

Soit x un réel, exprimer $\det(xId_3 - A)$ sous la forme d'un polynôme en x développé.

Exercice n°3

Même consigne que dans l'exercice n°2 avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice n°4

Soit n et p deux entiers naturels non nuls avec n>p

Que vaut det(AB) pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$?

Exercice n°5

La famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$: (2,1,0) ; (1,3,1) et (5,2,1) est-elle libre ? (On utilisera deux méthodes différentes)

Exercice n°6

Soit J_n la matrice de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Calculer $\det(J_n - Id_n)$

Exercice n°7

Soit $s_1, s_2, \ldots, s_n$ n reels.

Calculer le déterminant: $\begin{vmatrix} s_1 & s_1 & s_1 & \ldots & s_1 \\ s_1 & s_2 & s_2 & \ldots & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_n \end{vmatrix}$

Exercice n°8

Etant donné les scalaires x_0, x_1, $x_2 \ldots x_n$, on définit le déterminant $V(x_0, x_1, x_2 \ldots x_n) =$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ x_0 & x_1 & \ldots . x_n \\ {x_0}^2 & {x_1}^2 & \ldots . {x_n}^2 \\ \ldots & \ldots \ldots \ldots & \ldots \ldots \\ {x_0}^n & \ldots \ldots \ldots & {x_n}^n \end{pmatrix}$$

1) Montrer que $x \rightarrow V(x_0, x_1, x_2 \ldots x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n.
2) Démontrer que $V(x_0, x_1, x_2 \ldots x_n) = \prod_{0 \le i < j \le n}(x_j - x_i)$

Exercice n°9

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et soit A la matrice représentative d'un endomorphisme de E.

Montrer que :

1) Rang(A)=n⇔Rang(com(A))=n
2) Rang(A)= n−1 ⇔Rang(com(A))=1
3) Rang(A)≤n−2 ⇔Rang(com(A))=0

Exercice n°10

Soit A∈M2n(ℝ) une matrice antisymétrique et soit J∈M2n(ℝ) dont tous les coefficients sont égaux à 11.

Démontrer que, pour tout x∈ ℝ, det(A+xJ)=det(A)

(Ind. On montrera que x→ det(A+xJ) est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1, et pair)

Exercice n°11

Soit $M \in M_n(\mathbb{Z})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible et que son inverse soit dans Mn(ℤ)

Exercice n°12

Soit E un ℝ -espace vectoriel et f∈L(E) tel que $f^2 = -IdE$. Que dire de la dimension de E?

Exercice n°13 (INP 2024)

Pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour tous réels a et b, on considère la matrice tridiagonale à n lignes et n colonnes :

$$T_n(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ -b & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & -b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

L'objectif principal du problème est de s'intéresser à l'inversibilité de cette matrice en fonction des paramètres n, a et b.

On fixe ici des réels a et b non nuls et on pose $d_n = \det(T_n(a,b))$ pour tout $n \geqslant 2$.

5. (a) En justifiant vos calculs, montrer que pour tout $n \geqslant 4$,

$$d_n = ad_{n-1} + b^2 d_{n-2}.$$

   (b) Comment appelle-t-on une telle suite (d_n) définie de la sorte ?

6. <u>On suppose ici que $a = 3$ et $b = 2$.</u>

   (a) Donner d_2 et d_3.

   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$,

$$d_n = \frac{1}{5} \times \left((-1)^n + 4^{n+1}\right).$$

   (c) En déduire que $T_n(3,2)$ est inversible pour tout $n \geqslant 2$.