Fiche exo : Séries

Exercice n°1

Etudier la convergence de la série de terme général : $\sqrt{\frac{n+1}{n}}$

Exercice n°2

Déterminer la nature de la série suivante : $\sum_{n\geq1} \frac{n^2 \ln(n)}{e^n}$

Exercice n°3

Etablir la convergence et déterminer la somme de chacune des séries suivantes :

1) $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n(n+1)}$
2) $\sum \frac{n^2+n-1}{n!}$ (on admettra que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$)
3) $\sum (n^2+n+1)e^{-n}$ (ind. Etudier la fonction x→ $\sum_{n=0}^{N} e^{-nx}$)

Exercice n°4

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et convergente. Montrer que $\sum {u_n}^2$ est convergente

Exercice n°5

A l'aide d'une comparaison avec une intégrale, montrer la divergence de $\sum_{n\geq2} \frac{1}{n \ln n}$

Exercice n°6

Montrer la convergence et calculer la somme de $\sum_{n\geq1} \frac{2}{n(n+2)}$

Exercice n°7

Etudier la série de terme général : $u_n = n^{3/2}(\tan(1/n) - \mathrm{sh}(1/n))$

Exercice n°8

Etudier la série de terme général : $u_n = n^{1/n} - (n+1)^{1/n}$

Exercice n°9

Soit la série de terme général : $u_n = e^{-n^{\alpha}}$

1) Montrer que pour $\alpha \leq 0$, la série $\sum u_n$ diverge
2) On suppose que $\alpha > 0$, montrer que $u_n = o(\frac{1}{n^2})$ et en déduire la nature de $\sum u_n$

Exercice n°10

Montrer que **la suite** définie par le terme général : $u_n = (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) - \ln n$ converge

Exercice n°11

Soit a et b deux nombres réels

1) Etudier la convergence de la série de terme général : $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$
2) Lorsque la série converge, donner la somme.

Exercice n°12

Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{lnn}{n}$ diverge et donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{lnk}{k}$

Exercice n°13

Etudier la nature de la série de terme général : $u_n = (\cos\left(\frac{1}{n}\right))^{n^3}$

Exercice n°14

Soit n un entier naturel non nul, α>1. Donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$

Exercice n°15

Soit x∈]0 ;$\frac{\pi}{2}$[. On pose $u_n = \ln(\cos(\frac{x}{2^n}))$ pour n entier non nul.

1) Montrer que $\sum u_n$ converge
2) Calculer $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$

Exercice n°16

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes et à termes positifs.

Montrer que la série de terme général $\sqrt{u_n v_n}$ converge.

Exercice n°17

1) Soit $\beta \in \mathbb{R}^{*+}$, étudier la convergence de $\sum(\frac{1}{n^{\beta}} - \frac{1}{(n+1)^{\beta}})$
2) Etudier la convergence $\sum(\ln(n+1) - lnn)$
3) Retrouver la nature des séries de Riemann

Exercice n°18

Soit α>0, on pose pour n entier naturel non nul, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$, et pour α>1, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

1) Pour 0< α<1, déterminer un équivalent de S_n
2) Pour α>1, déterminer un équivalent de R_n

Exercice n°19

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, on suppose qu'il existe un réel α tel que :

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$

1) Montrer que $\sum u_n$ converge si α>1 et diverge si α<1
   Ind. On supposera d'abord α>1, on introduira la suite $v_n = \frac{1}{n^\beta}$ *avec* $1 < \beta < \alpha$
   On montrera en particulier que $\frac{u_n}{v_n}$ est décroissante à partir d'un certain rang…
2) Etudier la série $\sum \frac{1\times4\times7\times\ldots\times(3n-2)}{3^n n!}$

Exercice n°20 (oraux de concours)

Soit $u_0 \in]0, 1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$, puis que (u_n) converge vers 0.
2. En déduire que $\sum u_n^2$ converge et donner la somme de cette série.