Feuille d'exercices sur probabilités

Les questions en italique font appel à la notion de variance et espérance.

Exercice n°1 (INP)

Dans cet exercice, on étudie des situations probabilistes liées à un jeu de dés à six faces. L'expérience aléatoire consiste à lancer successivement deux dés équilibrés. On note :

- D_1 le résultat du premier dé et D_2 le résultat du deuxième dé,
- E_1 l'événement « $D_1 < D_2$ », E_2 l'événement « $D_1 = D_2$ », E_1 l'événement « $D_1 > D_2$ »,
- pour tout $k \in [|2, 12|]$, F_k l'événement « $D_1 + D_2 = k$ »

1. Déterminer l'univers Ω de cette expérience aléatoire.
2. Sans faire de calcul, expliquer pourquoi $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 1$.
3. Calculer la probabilité de chacun des événements E_1, E_2, et E_3.
4. Rappeler la définition mathématique de deux événements incompatibles.
   Déterminer les valeurs de k pour lesquelles F_k et E_2 sont incompatibles.
5. Rappeler la définition mathématique de deux événements indépendants.
   F_2 et E_2 sont-ils indépendants ? Justifier.

Exercice n°2

Soit une variable aléatoire X définie sur $\mathbb{N}$, et dont la loi de probabilité est donnée par :
$P(X=n)=\frac{\alpha}{3^n}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

1) Calculer α
2) *Calculer si c'est possible E(X). Calculer si c'est possible V(X)*

Exercice n°3

On lance un dé parfait à 5 faces un grand nombre de fois. On note p_n la probabilité que la somme des résultats obtenus lors des n premiers lancers soit paire.

1) Calculer p_1
2) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n
3) En déduire l'expression de p_n

Exercice n°4

Une urne contient n boules blanches et n boules rouges avec $n \geq 2$. On effectue au hasard et sans remise n tirages successifs d'une boule dans l'urne. Quelle est la probabilité que les n premières boules soient blanches ?

Exercice n°5

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé (Ω, τ, P) telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

1) Déterminer les réels α, β, γ tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{\alpha}{k} + \frac{\beta}{k+1} + \frac{\gamma}{k+2}$
2) Déterminer alors le réel a tel que $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \frac{a}{k(k+1)(k+2)}$ définisse une loi de probabilité de X.
3) *X admet-elle alors une espérance ? une variance ?*
4) *Si oui, les calculer…*

Exercice n°6

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $p \in]0,1[$. On pose q=1-p. On démontrera l'an prochain et on admet dans l'exercice que $E(X)=\frac{1}{p}$ et $V(X)=\frac{1-p}{p^2}$

1) On définit la variable Z par Z=min(X,Y)
   a) Calculer pour un entier n non nul, P(X≥n)
   b) Calculer alors P(Z≥n) puis P(Z=n)
   c) En déduire la loi suivie par Z
   d) Quelle est son espérance et sa variance ?
2) X et Z sont-elles indépendantes ?
3) Soit la variable aléatoire M définie par M=max(X,Y).
   Déterminer la loi de probabilité de M.

Exercice n°7

On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6. Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs? (on introduira An={les n-1 premiers lancers donnent 2 ou 4 et le dernier donne 6}, puis on calculera P($\cup A_n$))

Exercice n°8

1) On tire au hasard un nombre entier strictement positif. On suppose que la probabilité d'obtenir n vaut $\frac{1}{2^n}$. Pour k∈ℕ*, on note Ak l'événement "n est un multiple de k".
2) Vérifier que ceci définit une probabilité sur ℕ*,
3) Calculer la probabilité de Ak pour k∈ ℕ*
4) Calculer la probabilité de A2∪A3.

Exercice n°9

Soit X↪ $P(\lambda)$, on rappelle qu'alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, P(X=n) $= e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$

1) Montrer que E(X)= λ *et* V(X)= λ
2) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.
   Montrer que X+Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$

Exercice n°10

Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, l'information reçue d'une personne est transmise telle quelle à la personne suivante. Avec une probabilité 1−p, l'information reçue d'une personne est transmise de façon contraire à la personne suivante. On note pn la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1) Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
2) En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.
3) En déduire la valeur de $\lim_n p_n$. Qu'en pensez-vous?

Exercice n°11

Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la Santé. Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1%. Autorisez-vous la commercialisation de ce test? (ind. P(M /T))

Exercice n°12

On donne le tableau décrivant une loi de probabilité d'une variable aléatoire X

k	-2	-1	0	1	2	3
P(X=k)	2a	a	a	3a	a	2a

1) Justifier que a=$\frac{1}{10}$
2) Calculer P($|X| \leq 1$)
3) Soit Y = X+1, exprimer E(Y) et V(Y)
4) Déterminer la loi de Z=$|X-1|$

Exercice n°13

Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4, et est relu par une suite de relecteurs pour correction. À chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité p = 1/ 3 . Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.
1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit toujours pas corrigée à l'issue de la n-ième relecture ?
2. Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la n-ième relecture ?
3. Combien faut-il de relectures pour que cette dernière probabilité soit supérieure à 0, 9 ?

Exercice n°14

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles d'un espace probabilisé (Ω, A, P). Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$. (Ind. On s'intéressera à $\sum P(A_n)$)

Exercice n°15

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants d'un espace probabilisé (Ω, A, P).
1. Montrer que $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} P(\overline{A_k})$
2. On suppose que, pour tout n ∈ ℕ, $P(A_n) \neq 1$. Montrer que $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 1$ ssi $\sum P(A_n)$ diverge.
3. On suppose que, pour tout n ∈ N, $P(A_n) = \frac{1}{(n+2)^2}$. Calculer $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$

Exercice n°16 (ECS)

Exercice 10 (Type DS)**.** On considère un mobile qui se déplace sur les sommets d'un triangle A_1, A_2 et A_3. On suppose qu'initialement le mobile se trouve en A_1. Ensuite les déplacements s'effectuent de la manière suivante : si le mobile est en A_i,
— il passe en A_j ($j \neq i$) avec la probabilité $\frac{2}{5}$ dans les deux cas.
— il reste en A_i avec la probabilité $\frac{1}{5}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit les événements : U_n ="après n déplacements le mobile se trouve en A_1"; V_n ="après n déplacements le mobile se trouve en A_2"; W_n ="après n déplacements le mobile se trouve en A_3". On pose $u_n = P(U_n)$, $v_n = P(V_n)$ et $w_n = P(W_n)$.

1. Déterminer u_0, v_0 et w_0.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{5^n}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.
4. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^n pour $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire pour tout entier naturel n l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.
6. Quelles sont les limites des suites (u_n), (v_n) et (w_n) ?