Fiche d'exercices chapitre 2

Rappels du chapitre 1

On a : $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$ **et** $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Rq : Toutes ces formules peuvent se démontrer par récurrence…

<u>**Exercice n°1**</u>

Pour n entier naturel non nul, calculer les sommes suivantes :

1) $S_n = \sum_{k=0}^{n}(2^k + 4k + n - 3)$
2) $S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}$
3) $S_n = \sum_{k=0}^{n} k \times k!$

<u>**Exercice n°2**</u>

Pour n entier naturel non nul, calculer $P_n = \prod_{k=2}^{n}(1 - \frac{1}{k^2})$

<u>**Exercice n°3**</u>

Calculer les sommes doubles suivantes :

1) $S = \sum_{1 \leq i,j \leq n} i$
2) $S = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i$
3) $T = \sum_{1 \leq i < j \leq n} i\, j$
4) $M = \sum_{1 \leq i,j \leq n} |i - j|$

<u>**Exercice n°4**</u>

Soit k, p, n des entiers naturels tels que $p \leq k \leq n$

1) Montrer que : $\binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p} = \binom{n}{k}\binom{k}{p}$
2) En déduire la valeur de :
   a) $S = \sum_{p=0}^{k} \binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p}$
   b) $T = \sum_{k=p}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{p}$

<u>**Exercice n°5**</u>

Déterminer deux nombres a et b tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k}$

Pour n entier non nul, déterminer : $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

<u>**Exercice n°6**</u>

Soit n un entier naturel non nul, on pose $S = \sum_{i=1}^{n} i2^i$

1) Montrer que $S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} 2^i$
2) Montrer alors que $S = (n-1)2^{n+1} + 2$

Exercice n°7

Montrer que pour p et q entiers naturels vérifiant p≤n, on a : $\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}$

Exercice n°8

Démontrer de deux façons différentes l'inégalité de Bernoulli $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1+nx$

Exercice n°9

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, calculer $S=\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)$

Exercice n°10

Pour n entier naturel, calculer $S=\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2}\min(i;j)$

Exercice n°11

Pour n entier naturel, calculer $S=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$

Exercice n°12

Résoudre : $\begin{cases}5x+3y=-2\\ 2x+y=3\end{cases}$

Exercice n°13

Résoudre en discutant suivant la valeur du paramètre α

S$\begin{cases}x+2y+3z=3\\ 3x+6y+9z=\alpha\end{cases}$

Exercice n°14

Résoudre les deux systèmes suivants :

S$\begin{cases}x+2y-z=1\\ x-y+z=2\\ xyz=0\end{cases}$ et T $\begin{cases}x+2y-z=1\\ x-y+2z=2\\ 3x-y+z=3\end{cases}$

Exercice n°15

Etant donné $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, et $n\in\mathbb{N}$, démontrer la formule du binôme de Newton :

$(a+b)^n=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^p b^{n-p}$

Exercice n°16 (livre jaune p99)

Résoudre le système: $\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ x+3y+z=11 \\ 2x+5y-4z=13 \\ 4x+11y=37 \end{cases}$

Exercice n°17

Résoudre le système: $\begin{cases} 2y-z=1 \\ -2x-4y+3z=-1 \\ x+y-3z=-6 \end{cases}$

Exercice n°18

Résoudre le système: $\begin{cases} x+z=1 \\ y+z=0 \\ x+y=1 \\ 2x+3y=0 \end{cases}$

Exercice n°19

Pour a réel, et n entier naturel non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} ka^k$

1) Calculer S_n pour a=1
2) Pour a ≠1, calculer aS_n-S_n, et en déduire la valeur de S_n