

Khal de mathématiques INP(1)

Année 2023/2024

-Calculatrice interdite

-Le soin, la rédaction et la précision des réponses seront pris en compte dans la notation

-Durée : 3H

Exercice n°1

On considère la fraction rationnelle : $F = \frac{X^2+5X-2}{X^4-2X^3-X^2+2X}$

- 1) Décomposer le polynôme $Q=X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X$ en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$
- 2) Déterminer la décomposition en éléments simples de F
- 3) Pour tout entier naturel N supérieur ou égal à 3, on pose $S_N = \sum_{n=3}^N \frac{n^2+5n-2}{n^4-2n^3-n^2+2n}$
 - a) Montrer que $S_N = \frac{5}{3} + \frac{1}{N+1} - \frac{2}{N-1}$
 - b) La suite S_N est-elle convergente ? Préciser la limite le cas échéant.

Exercice n°2

Soit p un entier naturel non nul, une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite nilpotente d'indice 3 si $A^2 \neq 0_p$ et $A^3 = 0_p$

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, nilpotente d'indice 3, et pour $t \in \mathbb{R}$, $E(t) = I_p + tA + \frac{t^2}{2}A^2$

- 1) Vérifier que $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2$, $E(s)E(t) = E(s+t)$
- 2) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, E(t)^n = E(nt)$
- 3) Soit $t \in \mathbb{R}$, justifier que $E(t)$ est inversible, et préciser son inverse.
- 4) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, montrer que si : $aI_p + bA + cA^2 = 0_p$, alors $a=b=c=0$
- 5) Montrer que l'application : $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), t \rightarrow E(t)$ est injective
- 6) On se place ici dans le cas où $p=3$, on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 - a) Justifier que A est nilpotente d'indice 3.
 - b) Pour tout nombre réel t , exprimer matriciellement $E(t)$

Exercice n°3

On rappelle que les fonctions ch et sh sont les fonctions qui respectivement :

$$x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ on a la relation, } \forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$$

- 1) Montrer que l'équation $\text{sh}(x)=1$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet une unique solution α
- 2) Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_0^\alpha \text{sh}(t)^n dt$
 - a) Déterminer le sens de variation de la suite I_n
 - b) Justifier que la suite I_n converge.
 - c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)I_{n+2} = \text{ch}(\alpha) - (n+1)I_n$
 - d) En déduire la limite de I_n

Exercice n°4

Pour $x \in \mathbb{R}$, sous réserve que la quantité ait un sens, on pose : $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ appelée fonction zêta de Riemann.

- 1) Quel est le domaine de définition de la fonction ζ (en d'autres termes pour quelles valeurs de x , $\sum \frac{1}{n^x}$ converge)
- 2) On cherche un équivalent de la fonction ζ au point $x=1$
 - a) Soit k un entier naturel non nul, montrer que : $\frac{1}{(k+1)^x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{k^x}$
 - b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $\int_1^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^x}$
 - c) En déduire que : $\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$
 - d) Déterminer enfin un équivalent « simple » de $\zeta(x)$ en 1^+

Exercice n°5

- 1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E_1) : y'' - y = x^2 + x + 1$
- 2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E_2) : y'' - y = e^x$
- 3) On souhaite résoudre à présent l'équation $y'' - y = g$ où g est une fonction de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$
 Pour x réel, on définit la fonction f par $f(x) = \int_0^x \text{sh}(x-t)g(t)dt$
 - a) Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, montrer que : $\text{sh}(a-b) = \text{sh}(a)\text{ch}(b) - \text{ch}(a)\text{sh}(b)$
 - b) Montrer que $\text{ch}(a-b) = \text{ch}(a)\text{ch}(b) - \text{sh}(a)\text{sh}(b)$
 - c) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \text{sh}(x) \int_0^x \text{ch}(t)g(t)dt - \text{ch}(x) \int_0^x \text{sh}(t)g(t)dt$
 - d) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \int_0^x \text{ch}(x-t)g(t)dt$
 - e) Justifier que f soit deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$
 - f) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) - f(x) = g(x)$
 - g) Conclure quant au problème posé