Khal de mathématiques INP(1)

Année 2024/2025

-Calculatrice interdite

-Le soin, la rédaction et la précision des réponses seront pris en compte dans la notation

-Durée : 3H

Exercice n°1 (sur 3 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{e^{\sin(x)}}$

1) Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2
2) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en 0
3) Préciser, localement, la position de la tangente par rapport à la courbe de f.

Exercice n°2 (sur 7 points)

On définit l'application q : $\mathbb{R}_4[X] \rightarrow \mathbb{R}_4[X]$ qui renvoie à tout polynôme P de $\mathbb{R}_4[X]$ son quotient par la division euclidienne par X-1

1) Vérifier que $q(X^3 - 3X + 1) = X^2 + X - 2$
2) Démontrer que q est linéaire
3) Soit $C=(1, X-1, X^2-1, X^3 - 1, X^4 - 1)$
   a) Démontrer que C est une base de $\mathbb{R}_4[X]$
   b) Donner la factorisation de $X^n - 1$ par X-1 pour n entier non nul.
   c) Déterminer les images des éléments de C par q
4) a) Déterminer une base de Im(q)
   b) Déterminer une base de Ker(q)
   c) Les sous-espaces vectoriels Im(q) et Ker(q) sont-ils en somme directe dans $\mathbb{R}_4[X]$?
5) Soit B la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$, déterminer $M_{C,B}(q)$ ce qui correspond à la matrice de l'application linéaire q relativement aux bases C au départ et B à l'arrivée.
6) Déterminer la matrice de passage de B à C
7) Déterminer la matrice de passage de C à B
8) Justifier que $M_B(q)$ n'est pas inversible.

<u>Exercice n°3</u> (sur 8 points)

On considère la fonction suivante : f : $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \to \int_x^{2x} \frac{dt}{t+\sin(t)}$

<u>Partie 1</u>

1) Déterminer sur $\mathbb{R}$, le signe de t+sin(t)
2) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^*$
3) Etudier la parité de f.
4) Montrer que f est C^1 *sur* $\mathbb{R}^{*+}$ et déterminer sur $\mathbb{R}^{*+}$, f'(x)
5) En déduire que f a des variations opposées à celle du cosinus sur $\mathbb{R}^{*+}$

<u>Partie 2</u>

6) Déterminer un équivalent simple de $\frac{1}{\mathrm{t+sin(t)}}$ en $+\infty$
7) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$, on a $\left|f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t}\right| \leq \frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{dt}{t+\sin(t)}$
8) a) Montrer qu'il existe m$\in \mathbb{R}^{*+}$, tel que $\forall t \in \mathbb{R}^{*+}, t + \sin(t) \geq \frac{t}{2}$

   b) Déterminer alors la limite de f en $+\infty$

<u>Partie 3</u>

1) Déterminer un équivalent simple de $\frac{1}{\mathrm{t+sin(t)}}$ en 0
2) Montrer qu'il existe a$\in \mathbb{R}$ et $\mathcal{E} \in C(\mathbb{R}^{*+}, \mathbb{R})$ tels que $\lim\limits_{t\to 0+} \mathcal{E}(t) = 0$ et que $\forall t \in \mathbb{R}^{*+}, \frac{1}{\mathrm{t+sin(t)}} = \frac{a}{t} + \frac{\mathcal{E}(t)}{t}$

3) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$, on admet qu'il existe $\eta_\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$ tel que $\forall x \in [0; \eta_\alpha]$, $\int_x^{2x} \frac{\mathcal{E}(t)}{t} dt \leq \alpha$

   En déduire que f admet une limite finie en 0^+, préciser cette limite

<u>Exercice n°4</u> (sur 2 points)

Soit P $= X^3 - 8X^2 + 23X - 28$, on note x_1, x_2 *et* x_3 les racines complexes de P

Déterminer les trois racines de P sachant que $x_1 = x_2 + x_3$