INTRODUCTION À LA LOGIQUE

APERÇU HISTORIQUE

QU'EST-CE QUE LA LOGIQUE?

D'un point de vue sémantique, la logique consiste en l'étude du « logos ». D'où un glissement vers la question mais « Qu'est-ce que le logos ? ».

Le logos peut être traduit différemment selon le contexte, il peut s'agir :

-du langage

-la pensée

-et même en mathématique la notion de fractions dans le sens de rapport

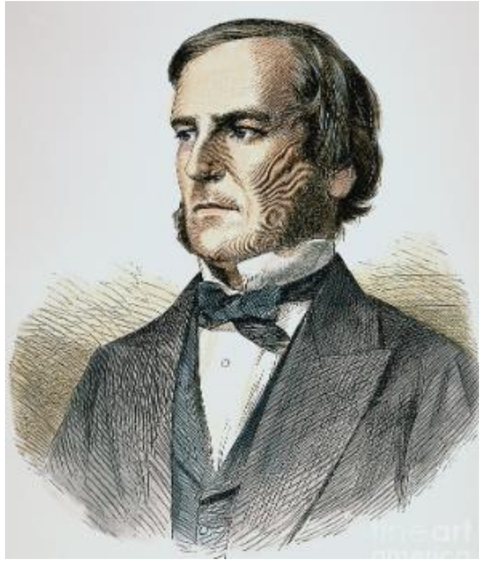
La logique s’est développée en même temps que la philosophie.

Boole dans les « lois de la pensée » développe particulièrement la notion de logique mathématique, séparée de la philosophie.

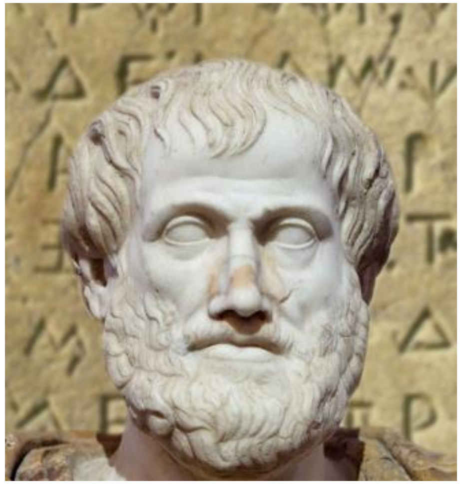
Il s’agit de l’étude de l’étude mathématique des raisonnements, et l’étude du raisonnement dans les mathématiques.

Boole se restreint à l’étude de la pensée mathématique qui par certains côtés semble plus « simple » d’accès dans la mesure où il y a un formalisme qui facilite l’appréhension des raisonnements, et tout simplement parce qu’une restriction du champ d’étude permet une analyse plus profonde.

Le fait intéressant est que l’approche moderne de la logique mathématique consiste en l’emploi d’un formalisme et de raisonnements mathématiques pour étudier le raisonnement mathématique dans une sorte d’auto-référencement.



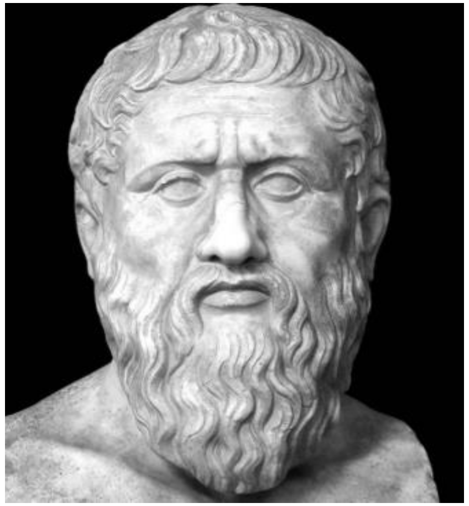
Cette idée est loin d’être nouvelle, on peut citer Aristote avec son approche assez formelle des raisonnements particuliers comme les syllogismes.



L’émergence de la logique s’est produite selon 3 voies différentes :

-La dialectique : étude du raisonnement qui a été employée essentiellement par les sophistes et les avocats. L’idée n’est pas nécessairement d’aboutir à la vérité mais de construire un raisonnement, possédant au moins en apparence une forme de justesse, permettant de relier deux propositions. Il s’agit de convaincre sans persuader.

Les sophistes ont ainsi inspiré à Platon la « loi de non-contradiction ».



-Les paradoxes : il s’agit de raisonnement porteur de contradictions. La logique consiste à comprendre les contradictions, et à appréhender le moteur formel permettant leur production.

Littéralement qui va contre la doxa, c’est-à-dire l’opinion commune.

Exemple : Le paradoxe du menteur : « Dis-tu la vérité ? Non… »

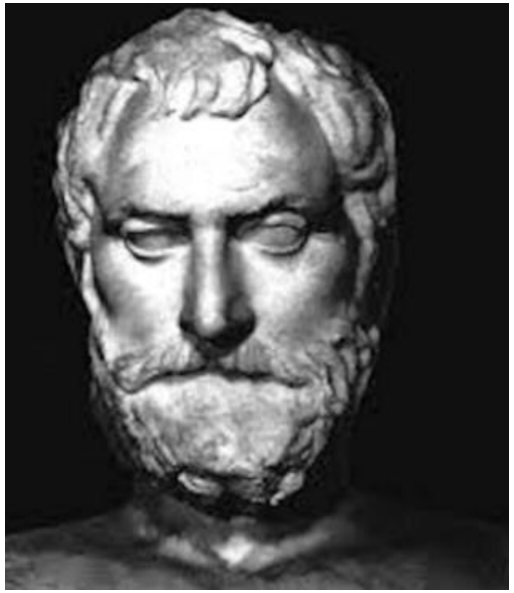
A noter, les 3 caractéristiques de ce paradoxe : l’auto-référencement, la négation : ne pas dire la vérité, et la vérité (Qu’est- ce que la vérité ? Poncepilate pose la question à Jésus dans l’évangile de Jean, et n’attend même pas la réponse…)

Résoudre ce paradoxe suppose donc de s’intéresser à ces 3 notions, et c’est un vrai moteur dans la réflexion, c’est la sémantique et l’articulation entre ces notions, c’est la syntaxe.

-Les mathématiques : Sous l’impulsion de Thalès, est apparu le besoin de fournir des « démonstrations » aux propositions mathématiques.

Un exemple intéressant : la mesure de la hauteur de la pyramide.

Selon la légende, Thalès aurait eu l’intuition que l’ombre d’une pyramide et l’ombre d’un bâton sont proportionnelles respectivement à la hauteur de la pyramide et à la longueur du bâton.



De ce logos en termes de rapport de longueurs, Thalès en tire une autre forme de logos : la tentative de démontrer cette intuition !

D’où les problèmes : Qu’est-ce qu’une démonstration ? Quels sont les points de départ (ce qu’on appellera les « axiomes ») ? Quelles sont les lois à respecter ?

LES PARADOXES DE L’ANTIQUITÉ

Le paradoxe d’Achille et de la tortue.

On doit se paradoxe à Zénon (qui serait à l’origine d’une quarantaine de paradoxes, dont celui de la flèche).

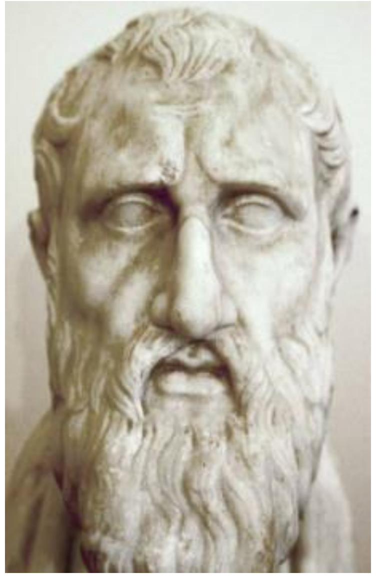
Il y a une course, Achille est défié par une tortue à la course.

Le paradoxe d'Achille et de la tortue, formulé par Zénon d'Élée, dit qu'un jour,

le héros grec Achille a disputé une course à pied avec une tortue.

Comme Achille était réputé être un coureur très rapide,

il avait accordé gracieusement au lent reptile une avance de cent mètres.



Zénon affirme donc que le rapide Achille n'a jamais pu rattraper la tortue. En effet, supposons pour simplifier le raisonnement que chaque concurrent court à vitesse constante, l'un très rapidement et l'autre très lentement : au bout d'un certain temps, Achille aura comblé ses cent mètres de retard et atteint le point de départ de la tortue ; mais pendant ce temps, la tortue aura parcouru une certaine distance, certes beaucoup plus courte mais non nulle, disons un mètre.

Cela demandera alors à Achille un temps supplémentaire pour parcourir cette distance, pendant lequel la tortue avancera encore plus loin, puis une autre durée avant d'atteindre ce troisième point alors que la tortue aura encore progressé. Ainsi, toutes les fois qu'Achille atteint l'endroit où la tortue se trouvait, elle se retrouve encore plus loin. Par conséquent, le rapide Achille n'a jamais pu et ne pourra jamais rattraper la tortue.

Il s’agit ici d’un paradoxe basé sur la différence entre l’expérience empirique (tout le monde dépasserait la tortue à la course) et un raisonnement théorique.

En fait, si le raisonnement logique de Zénon est juste, il lui manque un argument d’ordre mathématiques, en l’occurrence une série, donc une somme de termes infinis, peut converger.

Les paradoxes sont donc un moteur que ce soit pour la logique, la philosophie et ici les mathématiques.

Ainsi certaines séries convergent et d’autres divergent, d’où l’émergence avec Leibniz et Newton (2000 ans après Zénon) de l’étude des séries.

Les paradoxes ont nourri la littérature en particulier Borges (décliné sur le thème du labyrinthe), Kafka (dans le procès, les obstacles ne cessent de s’accumuler pour repousser sans cesse la fin) et le paradoxe du menteur se retrouve dans Don Quichotte, avec un passage évoquant l’existence d’un pont surveillé par un gardien qui devait laisser passer ceux qui disent la vérité et frapper ceux qui mentent, or un jour un voyageur se présente, et à la question « pourquoi êtes-vous ici ? » , il répond pour me faire frapper…

Un exemple amusant dans le mode de Zénon mais aboutissant à une série divergente, le roman « Tristam Shandy » de Sterne dans lequel le protagoniste écrit son autobiographie, qui au bout de 4 volumes n’a raconté que deux jours de sa vie…

Mais il existe également des paradoxes en mathématiques, par exemple les Pythagoriciens ont été choqués par l’existence de nombres réels non rationnels (des grandeurs non mesurables par des nombres, grandeurs qualifiées d’incommensurables), en l’occurrence la diagonale d’un carré de côté 1.

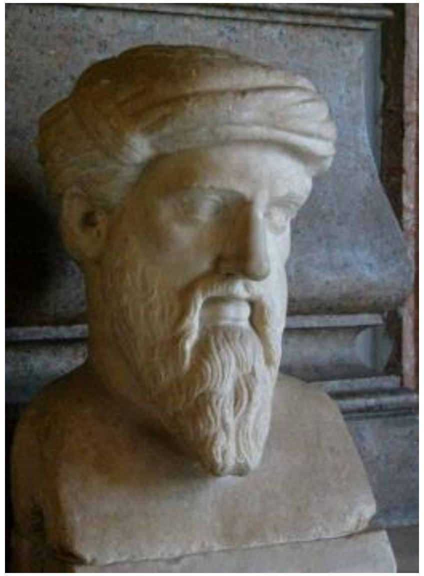
LES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE

La différence entre par exemple les mathématiques grecques et celles des babyloniens est l'idée de démonstration.

Euclide démontre non seulement le théorème de Pythagore mais en plus sa réciproque.

Il a compris l'importance de mettre un cadre à une démonstration (afin d'éviter une régression à l'infini) et d'admettre des propriétés premières non démontrées : les axiomes.

C'est une idée que l'on doit à Aristote dans son « Organon » : « C'est signe de bonne éducation de savoir quand s'arrêter… », et qu'Euclide a mis en pratique dans ses éléments.



Le projet euclidien de partir de propositions, de construire par réduction un parcours logique menant à un théorème anime toujours les mathématiques contemporaines. Mais il ne constitue pas un indépassable dans le domaine de la rigueur…

La première proposition du premier livre d'Euclide affirme qu'à partir d'un segment,

on peut construire un triangle équilatéral.

Cependant, quelques 2000 ans plus tard, Leibniz fait remarquer qu'à aucun moment

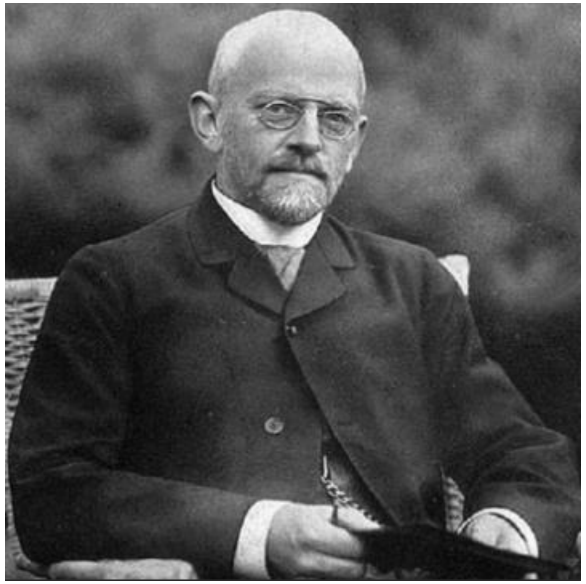
dans les axiomes d'Euclide, ne figure la propriété de continuité d'une droite.

Leibniz comprend ainsi qu'il manque l'axiome de continuité pour la droite, le cercle etc.

La quatrième proposition affirme que deux triangles avec un angle égal et les deux côtés de cet angle deux à deux égaux sont égaux. La démonstration consiste simplement à imaginer la superposition des deux triangles…

Schopenhauer fait remarquer que rien ne permet d'affirmer que le déplacement d'un triangle ne modifie pas le triangle. Cette quatrième proposition est par la suite devenue un axiome.

Hilbert décide de reprendre en 1949 les éléments d’Euclide dans son livre « les fondements de la géométrie ». Hilbert décide de reprendre l’axiomatisation d’Euclide, ainsi que la trame logique permettant la démonstration de théorèmes.



Remarque n°1 : Il y a une différence entre les termes axiomes et postulats.

Un axiome est une propriété non démontrée ou première admise dans le domaine de la logique (par exemple si A=B et A=C alors B=C), tandis que le postulat en est une déclinaison dans un domaine scientifique bien précis.

Les postulats ne sont ainsi pas les mêmes selon les branches mathématiques ou physiques.

Remarque n°2 : Les mathématiques ne produisent pas de vérité absolue puisque basée sur des propositions premières, mais le savoir repose ici sur des constructions et des mises en relation.

LES DIALOGUES PLATONICIENS

Pour les Pythagoriciens, « tout est nombre ». C'est le credo pythagoricien, il s'agit des nombres entiers.

En se baladant à Crotone, Pythagore entend le son que fait le martèlement d'un forgeron sur une enclume. Il s'aperçoit qu'à marteau égal, le son est le même, mais quand il y a un rapport du simple au double dans le poids du marteau, la note est la même par exemple un do mais avec une différence, le son est plus aigu ou plus grave, ce qu'on a appelé plus tard l'octave.

Il découvre ainsi une corrélation entre un rapport harmonique (entre les sons), un rapport physique (entre les masses des marteaux) et un rapport mathématique.

Il se pose ensuite la question d'un rapport de 3 à 2 dans les poids des marteaux (do à sol), puis de 3 à 4 (do à fa).

Le credo a continué à infuser dans la science, pour Galilée : « La nature est un livre, écrit dans un langage : les mathématiques ».

Tout est nombre…tout est rationnel, c'est-à-dire exprimable comme un rapport, donc tout est descriptible à l'aide des mathématiques.

Mais le monde Pythagoricien va entrer en crise. Le problème du calcul de la longueur de la diagonale d'un carré mais apparaître une grandeur qui ne peut pas s'exprimer comme un nombre rationnel.

Cette grandeur est incommensurable vis-à-vis des rationnels. Elle est donc par définition irrationnelle.

Cette crise va faire émerger un nouveau type de raisonnement : le raisonnement par l'absurde. Et c'est par ce type de raisonnement qu'on peut établir l'irrationnalité de $\sqrt{2}$.

Quelle est la place des mathématiques dans l’œuvre de Platon ?

Platon fut le premier penseur occidental à avoir compris le rôle de la logique. La philosophie de Platon cherche à comprendre de quoi s’occupent les mathématiques et celle d’Aristote comment fonctionnent les mathématiques.

Platon développe ainsi la notion d’idée qui veut dire en grec « forme ». Le mythe de la caverne peut être vu comme une approche de la géométrie dans un sens projectif d’ailleurs. On ne voit ainsi jamais le cercle, le mathématicien manipule l’idée de cercle, mais jamais un compas ne trace un cercle dans son absolu. Le dessin projeté n’est toujours qu’une corruption de l’idée de cercle.

Et d’ailleurs, il y a toujours chez les élèves apprenant la géométrie une ambiguïté entre topologie et logotopie.

Pour Platon, les mathématiques doivent être enseignées à l'école, dans chaque école quel que soit le niveau, non dans un but utilitariste, mais parce que cela favorise l'éthique. En effet, l'éthique est l'outil pour choisir entre le bien et le mal, le pire et le meilleur, et les mathématiques peuvent faciliter ce choix.

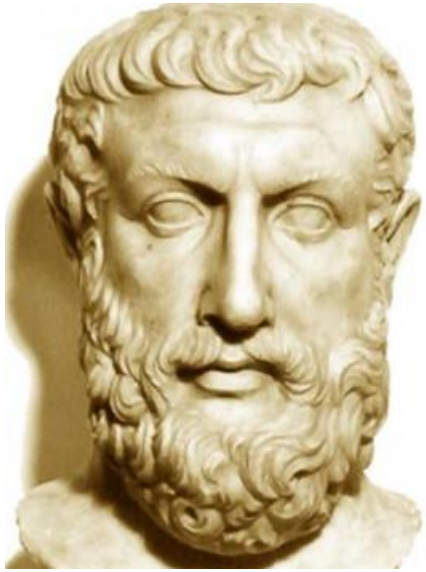
Dans le Menon, figure la toute première démonstration, en l'occurrence celle du théorème de Pythagore.

L'apport de Platon à la logique est fondamental avec la distinction entre affirmation et négation.

Les sophistes ne faisaient pas cette distinction. Le problème de la cohérence ne se posait pas à eux.

A l’époque de Platon, les Grecs n’utilisaient pas le verbe être. Mais l’emploi de ce verbe commence à se développer, ainsi que l’emploi de ce verbe avec la négation. D’où l’apparition du paradoxe du menteur…

Parménide s’intéresse ainsi au « non-être », et la contradiction du non-être qui est.



Mais Platon a compris que le verbe être ne peut être employé de façon absolue.

Le problème de Parménide est d’employé être dans un sens absolu est faux. Il faut employer sujet et prédicat.

Platon a fait la différence entre ensemble et élément et a compris que « être » signifie appartenir.

ARISTOTE…L'INTELLIGENCE

Le premier grand logicien fut Aristote.

Aristote se distingue par une étude systématique de la structure logique. Les étudiants d'Aristote et d'une autre école avaient des visions différentes de la logique.

Aristote a proposé un cours de logique. Il a introduit tout d'abord des termes utilisés ensuite en logique : les connecteurs (non, et, si…alors ...) , les prédicats, les quantificateurs (tous, aucun, il existe).

Mais à partir des connecteurs et des quantificateurs, il s'intéresse à des propositions plus complexes.

Aristote s'intéresse tout particulièrement à la négation, par exemple « être blanc », « être non blanc », « ne pas être blanc », « ne pas être non blanc ». Quelle est la vraie négation de « être blanc » ? (c'est la deuxième).

Et bien sûr, il étudie les syllogismes. Un syllogisme est un raisonnement constitué de deux prémisses et d’une conclusion, le tout avec des quantificateurs. Il s’intéresse à toutes les combinaisons possibles et d’en dégager celles qui à coup sûr, aboutissent à un raisonnement correct.

La théorie d’Aristote comporte des erreurs, il est préférable d’étudier d’abord la logique ou les mathématiques, et de regarder le cours d’Aristote ensuite, plus dans une dimension historique que dans une dimension pédagogique.

Aristote identifie 256 formes de syllogisme. D’un point de vue combinatoire, il y en a bien 256, et Aristote isole un certain nombre de syllogismes corrects.

En fait, il y a 4 schémas valides, et dans chaque schéma, il y en a 6 qui sont corrects, donc 24 en tout.

Parmi les 24, 9 sont corrects sous conditions en réalité. En effet, Aristote considère qu’il est évident qu’une proposition universelle pour un ensemble sera vraie pour chaque élément de cet ensemble.

Mais une proposition peut être universelle parce qu’elle n’est vérifiée par aucun objet, et cela ne présage en rien de son existence.

Il a découvert le principe de la contraposition. Platon commet de nombreuses erreurs de raisonnement, on peut lire, entre autres, dans ses « Dialogues » : « Si l’âme tempérée est bonne, alors l’âme non tempérée est mauvaise »…

A partir de la contraposition, Aristote construit 6 groupes d’équivalence de syllogismes.

LA SCOLASTIQUE

La scolastique est la reprise presque 1000 ans plus tard de la philosophie grecque, en particulier de la logique développée par les stoïciens dans sa forme propositionnelle.

Mais la scolastique s’est intéressée aussi à la logique d’Aristote et en particulier les syllogismes modaux.

La scolastique a développé sa propre vision de la logique en s’intéressant à la définition rigoureuse des termes employés.

Son but est d’employer la logique à des fins théologiques.

Il y a deux voies ; « croire pour comprendre » ou « comprendre pour croire », ces deux voies distinctes sont représentées par Abélard et Saint Anselme.

Croire pour comprendre consiste à accepter le mystère de la foi a priori. (Anselme)

Comprendre pour croire consiste par la voie de la logique de concéder à la foi. Il fut excommunié deux fois. (Abélard)

Pierre Abélard : C’est un immense logicien, connu pour son histoire d’amour avec son élève Héloïse, mais l’oncle le punit en le faisant castrer. Or, c’est lui qui a introduit le terme de conjonction qui se dit copula…

Abélard utilise la « méthode des questions » pour développer une démonstration. C’est une méthode dialectique.

Anselme d’Aoste propose une démonstration de l’existence de Dieu. Cette démonstration n’est pas la première mais elle est originale à l’époque.

La méthode de Saint Anselme est de nature mathématique : Axiome-Démonstration-Conclusion.

Pour la conclusion, Saint Anselme veut établir comme théorème l’existence de Dieu. D’où la première difficulté : définir ce qu’est Dieu.

Dieu est ainsi défini comme l’être qui a toutes les perfections. Et Anselme prend comme axiome : l’existence est une perfection.

La démonstration est donc facile…

Kant fait remarquer que l’axiome est trompeur car l’existence n’est même pas propriété, d’autres critiques font remarquer que l’axiome se calque sur la conclusion.

A noter que Godel donnera une démonstration assez proche de celle d’Anselme.

THOMAS D'AQUIN

Thomas D'Aquin est le plus grand représentant de la scolastique.

Il est dans la voie de Saint Anselme, et cherche surtout les voies de compréhension de la foi.

L'idée est de partir d'un événement et de remonter ainsi le fil de la causalité, d'où à la façon de Zénon, une régression à l'infini. Or comme pour les Grecs, il faut abolir le problème de l'infini.

D'où une première voie : Dieu est la cause première, cause incausée.

Un problème, rien ne dit que la remontée de deux fils d'événements doive

donner la même cause première. D'où un problème d'unicité.

Dire de Dieu qu'il est la cause première signifie que tous les fils remontent à la même cause ?

Deuxième voie ; Dieu est le moteur immobile, car chaque mouvement est causé par un mouvement précédent, et Dieu est le mouvement non provoqué.

Aristote s’était déjà penché sur la question et avait identifié au passage 47 ou 55 types de mouvements ! D’où 47 ou 55 « moteurs immobiles »

Pourquoi la logique moderne ne s’est pas appuyée sur la logique scolastique ? En fait elle fait preuve d’une excessive sophistication, que Kant dénonce déjà dans sa « Critique de la raison pure ».

La subtilité excessive est due à une subtilité excessive dans l’étude du langage.

Mais surtout, la scolastique est restée une philosophie et n’a pas su développé un symbolisme qui l’aurait fait entrer dans une théorie logique et mathématique.

C’est un écueil assez général d’ailleurs celui de la sémantique comme le faisait remarquer avec humour Molière dans par exemple « Les femmes savantes », et les mathématiques ont réussi à développer un formalisme par exemple avec François Viète, qui évite le risque conceptuel d’inventer un mot pour résoudre un problème.

Les scolastiques ont poussé trop loin l’analyse comme dirait Aristote, et leur logique ne pouvait devenir symbolique et formel, avec des démonstrations qui deviendraient calculs.

« Conséquence admirable » : Il s’agit d’une règle logique redécouverte par les scolastiques, qui consiste à supposer le contraire de la proposition et de voir si on obtient la proposition de même, de cette façon Aristote avait établi qu’il existait quelques vérités.

De cette façon, Descartes propose qu’on ne puisse pas douter de tout.

Saccheri chercha à démontrer le cinquième postulat d’Euclide à partir des 4 premiers, il ne réussit pas mais découvrit les fondements de la géométrie hyperbolique.

LEIBNIZ

Leibniz

C’est l’un des derniers « génies universels » : il s’intéresse à la philosophie, aux mathématiques (le développement du calcul infinitésimal), mais aussi à la logique.

Leibniz a développé une certaine vision dans le domaine de la logique. Il rêve de créer un langage universel de nature mathématiques propice au développement de toutes les sciences ; Une langue universelle, formelle, symbolique et « calculable »

Il travailla également sur les paradoxes dans les textes de nature juridique.

Panlogisme : « Tout est réductible à la logique »

Leibniz est un panlogiste, avec son idée des « mondes possibles ».

Il développe l’idée qu’une vérité logique est indépendante des contingences

et reste vraie quelque soit le monde possible.

La contingence et la nécessité sont pour Leibniz la même chose,

ainsi les choses sont ainsi parce qu’elles ne pouvaient pas être différentes.

BOOLE

En -200, les stoïciens font une analyse sur les connecteurs logiques : non, et, ou, implique.

Ils ont compris qu'on peut réduire la validité d'une proposition complexe à celle des propositions plus simples qui la composent.

Par exemple : « Aujourd'hui, il ne pleut pas » est vraie si et seulement « Aujourd'hui, il pleut » est fausse.

Ou encore, une conjonction de propositions sera vraie lorsque les deux propositions seront vraies.

Boole, universitaire anglais, reprit l’étude des stoïciens en comprenant que derrière les valeurs de vérité qui sont encore des concepts purement philosophiques. Il propose d’attribuer le 0 pour une propriété fausse et 1 lorsqu’elle est vraie.

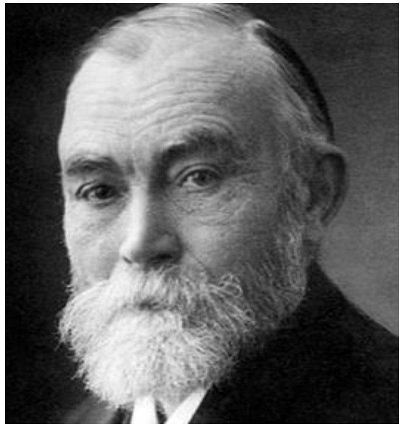
Et alors derrière la conjonction de propositions se cache une simple multiplication.

Et cette découverte forme l’algèbre de Boole, qui sera utile dans l’étude des circuits électriques (courant passe : 1, courant ne passe pas : 0), puis dans l’élaboration du langage des ordinateurs.

En 1847, il publie « l’analyse mathématique de la logique », puis en 1851 de vulgarisation, « les lois de la pensée » qui reprend son précédent ouvrage mais avec de nombreux exemples. Ce livre rencontre un franc succès.

Boole est considéré comme le père de la logique mathématique.

FREGE



La logique moderne est arrivée avec Boole à une formulation mathématique.

Mais Frege va aller plus loin que la reformulation de concepts anciens avec l’algèbre de Boole.

Il va procéder à l’étude des relations constatant un oubli depuis Aristote

qui ne prenait que « sujet-prédicat » mais « sujet-verbe-prédicat ». Les mathématiciens ont en effet besoin d’établir des relations entre les objets.

Ainsi Boole fut le père de l’étude mathématique de la logique, tandis que Frege lui fut le père de l’étude logique des mathématiques.

Frege comprit l’importance de développer une logique des relations, et en particulier l’emploi des quantificateurs et leur inversion lorsqu’il y a plusieurs sujets (quel que soit…il existe ou il existe…quel que soit…)

Or dans ce champ de la logique, les raisonnements ne peuvent être réduits à des calculs (c’est ce que Turing a

Frege propose également une idéographie avec des symboles mathématiques et en ce sens il poursuit le sillon tracé par Leibniz. Frege isole en 1879 un certain nombre d'axiomes logiques et Gödel démontrera cinquante ans plus tard que cette axiomatique permet de faire dériver toutes les formes de raisonnements valides.

Ensuite, Frege pense que la logique peut être considérée comme la fondation des mathématiques. De tout est nombre rationnel chez Pythagore entré en crise avec les irrationnels, à tout est géométrie d'Euclide entré en crise (l'addition et la multiplication des entiers nécessitent des interprétations en termes de longueur, d'aires et de volumes mais comment définir le produit de 4 nombres ?), Tout est nombre réel avec Descartes (comment réduire alors la géométrie à l'analyse ? c'est la géométrie analytique avec les coordonnées).

Cantor, Dedekind découvrent que les nombres réels peuvent se déduire des nombres entiers (mais avec une infinité d'entiers), d'où le besoin de l'ensemble des entiers. D'où l'idée de Frege de réduire les entiers dans un langage logique afin de réduire l'ensemble des mathématiques à la logique. Les mathématiques ne seraient alors qu'une partie de la logique.

CANTOR

Scott Dun a découvert un paradoxe concernant le nombre de points de deux cercles concentriques.

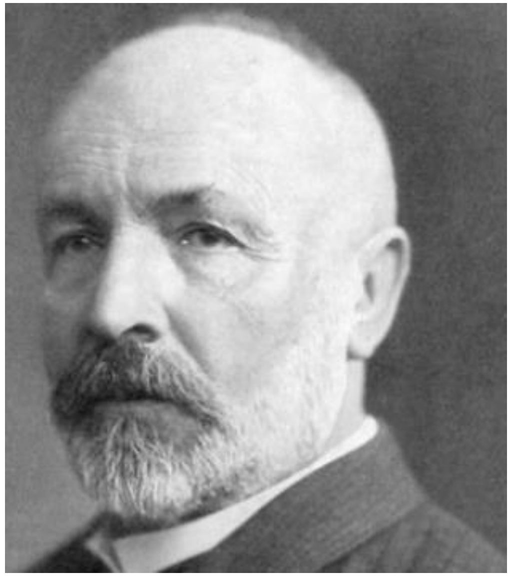
Galilée découvrit également qu'à chaque entier on peut faire correspondre un nombre pair…

D'où le principe de bijection qui permet de mettre en rapport les ensembles

qui ont le même nombre d'éléments.

L'idée de Frege et de Cantor est de définir les nombres entiers comme classes d'ensembles

ayant le même nombre d'éléments (par bijection)



A noter que lorsque Cantor découvre qu'il y a plusieurs catégories d'infini, il demande audience au Vatican avant de publier ses recherches. Les Dominicains, en charge de l'inquisition, étudièrent son travail, et au passage virent dans l'infini des infinis, un infini absolu…Dieu.

Frege cherche alors à construire la théorie des ensembles. Il propose deux axiomes : Deux choses qu’on ne peut pas distinguer sont égales, ainsi deux ensembles qui ont les mêmes éléments sont égaux, et le deuxième « à chaque prédicat, correspond l’ensemble des éléments possédant la propriété du prédicat ». Par exemple « être rouge » correspond à l’ensemble de tous les éléments de couleur rouge.

Mais en 1912, Frege reçoit une lettre d’un jeune homme…Russell. Il propose le prédicat consistant à ne pas appartenir à lui-même. D’où un paradoxe avec la correspondance de Frege dans son deuxième axiome.

Des tentatives ont été proposées pour lever ce paradoxe, comme le fait qu’un ensemble ne peut pas s’appartenir.

Cantor propose quant à lui : La classe des ensembles qui créent des contradictions et les « bons ensembles ».

En fait, il y aura tout un travail sur l’axiomatique : existence de l’ensemble vide, la réunion d’ensembles, le produit cartésien d’ensembles, et l’existence d’un ensemble infini.

RUSSELL

En 1950, Russell reçoit le prix Nobel de littérature. Il fut un grand propagandiste pour la logique.

En logique, il a mis en avant dans une lettre destinée à Frege ce qui allait devenir le « paradoxe de Russell »

Deux grands mathématiciens Cantor et Dedekind définissent l'ensemble des réels. En particulier, Dedekind construit les réels comme limites infinies de rationnels.

Dans les « principes mathématiques », Russell et White, pensent avoir réussi à construire une axiomatique pour refonder les mathématiques en faisant disparaître tous les paradoxes.

Mais Gödel montrera que les fondements de Russell ne permettent même pas de fonder l'arithmétique…

En fait, il montrera même qu'aucun système axiomatique ne le permettra.

Russell ne comprendra jamais vraiment les théorèmes d’incomplétude de Gödel. A noter que Russell fut beaucoup aidé par Peano, qui construit un véritable formalisme pour la logique mathématiques.

A noter que White utilisait dans son système axiomatique l’infini sans le définir logiquement. Et aujourd’hui, on ajoute l’axiome de l’infini en plus des axiomes logiques.

Il ajouta également l’axiome du choix. La réduction des mathématiques à la logique est donc mise à mal par Gödel.

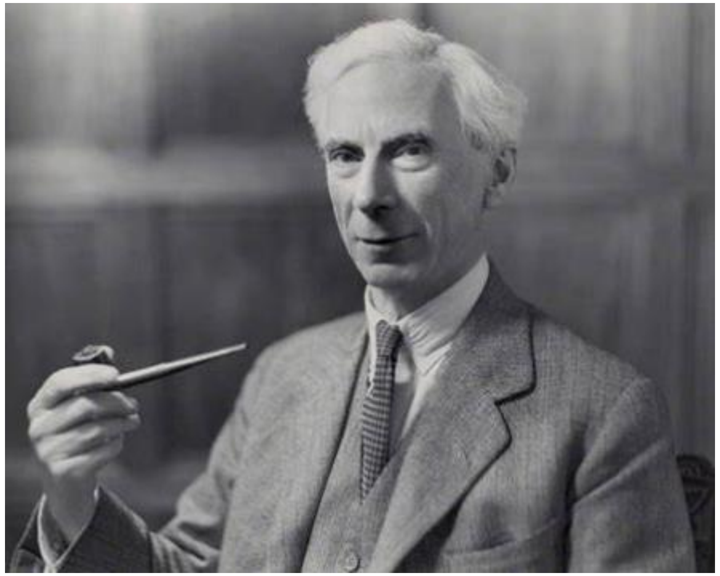
LE PARADOXE DE RUSSELL

L’ensemble des tasses de thé n’est pas une tasse de thé, toutefois l’ensemble des éléments qui ne sont pas des tasses de thé n’est pas une tasse de thé.

Les ensembles se divisent en deux classes : ceux qui s’appartiennent à eux-mêmes et ceux qui ne s’appartiennent pas à eux-mêmes.

Mais l’ensemble des ensembles qui ne s’appartiennent pas à eux-mêmes, s’appartient-il à lui-même ?

Cette question ressemble beaucoup au paradoxe du menteur.



Dans le langage, il y a les catégories des adjectifs, l’adjectif court est court, l’adjectif long est court.

Donc court a la propriété qu’il désigne lui-même et long non, l’un est autologique, hétérologique.

Or hétérologique est un adjectif hétérologique ou autologique ?

Dans une ville, un barbier écrit, dans cette rue, je ne rase que les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes. Quant est-il pour le barbier ? (Dans ce cas, un tel barbier n’existe pas)

Beaucoup de concepts métaphysiques relèvent de ce type de paradoxes : L’être absolu n’est pas, la vérité absolue n’est pas etc.

Mais le théorème de Gödel dit aussi qu’il existe des vérités non démontrables.

WITTGENSTEIN

Sa famille est illustre. Un de ses frères composait au piano dès 4 ans avant disparaître définitivement du jour au lendemain. Une de ses sœurs a eu son portrait peint par Klimt.

Mais il décide de refuser de vivre grâce à l'argent de sa famille. Il étudie en Autriche, et connut Adolf Hitler durant ses études puis à Cambridge où il fut l'élève de Russell et Moore.

Il parlera de solution finale lui aussi dans son tractatus concernant la logique…

C'est un poème à la façon de Lucrèce dans « De Rerum »

Pour lui, le monde a une structure,

le passage de la pensée au langage se reflète dans cette même structure.

Pour étudier le monde, il faut étudier le langage, plus précisément le langage de la logique. C’est une vision partagée par les stoïciens.

Mais les stoïciens avaient compris qu’il y avait deux constructions de la vérité :

-l’une de définir la vérité comme une proposition vraie dans tous les mondes possibles (syntaxe)

-l’autre de la voir comme théorème démontré à partir d’axiomes considérés comme vrais (sémantique)

GODEL

Sa famille est illustre. Un de ses frères composait au piano dès 4 ans avant disparaître définitivement du jour au lendemain. Une de ses sœurs a eu son portrait peint par Klimt.

Mais il décide de refuser de vivre grâce à l'argent de sa famille. Il étudie en Autriche, et connut Adolf Hitler durant ses études puis à Cambridge où il fut l'élève de Russell et Moore.

Il parlera de solution finale lui aussi dans son tractatus concernant la logique…C'est un poème à la façon de Lucrèce dans « De Rerum »

Pour lui, le monde a une structure, le passage de la pensée au langage se reflète dans cette même structure.

Considéré comme le Dieu de la logique (God, et Eloim)

Il fit un lien entre la sémantique (la vérité) et la syntaxe (la formulation).

En 1921, il démontra que dans le cadre de la logique propositionnelle, les vérités sémantiques sont toutes les formules qu’on peut démontrer à partir des axiomes de Frege. La sémantique et la syntaxique sont alors reliées.

Dans le cadre de la logique prédicative (avec les quantificateurs), ce même lien fut conjecturé par Hilbert au congrès de Bologne, et démontré dans la thèse de doctorat de Gödel. Ce théorème de complétude est un grand résultat de la logique.

Il établit d’abord ce qu’est une vérité logique, et que la vérité logique et démontrable est pratiquement la même notion.

Ainsi, il existe un système d’axiomes dans lequel toute vérité est démontrable, c’est-à-dire dérivable des axiomes par la construction de théorèmes (théorème de complétude)

Il aborde ensuite le problème de la consistance. Les mathématiciens pensent en grande majorité que toutes les vérités arithmétiques sont démontrables à partir d’un bon système d’axiomes. Il suffirait ainsi de dériver à partir de ce système d’axiomes toutes les propositions possibles et on découvre tous les théorèmes possibles.

Mais Gödel publie son théorème d’incomplétude. Toutes les théories mathématiques comportant les entiers sont incomplètes. Il y a des vérités arithmétiques non démontrables avec un système d’axiomes. Mais il n’y a aucun système d’axiomes qui couvrira toutes les propositions démontrables. La vérité mathématique est plus large que ce qui est démontrable.

A noter que Gödel s’intéressa aussi à la relativité. Si on veut ajouter une notion de temps absolu à la relativité d’Einstein, alors ce sera un axiome !

THÉORÈMES D'INCOMPLÉTUDE DE GÖDEL

Il y a deux grands théorèmes de Gödel:

Le premier : Un système d'axiomes pour une théorie mathématique contenant l'arithmétique, alors si ce système est suffisamment « puissant » et consistant pour l'arithmétique (on ne peut démontrer des propriétés contraires) alors il est incomplet, il y aura des vérités non démontrables.

Ainsi l'arithmétique empêche d'espérer pouvoir construire toutes les vérités d'un système.

Le deuxième : Un système d'axiomes ne peut permettre de démontrer qu'il est consistant.

Le deuxième théorème fut évoqué par Hilbert dans sa fameuse liste de 23 problèmes. Le second problème est le problème de la consistance de l'arithmétique. Quand Euclide avait énoncé ses axiomes pour la géométrie, tous les penseurs de l'époque pensaient que ces résultats étaient évidents et naturels. Mais l'histoire de la géométrie va retoquer certains axiomes, comme celui de la définition d'une droite, et de l'axiome des parallèles qui permit l'émergence des géométries non euclidiennes (sphériques et hyperboliques). Beltrami découvrit grâce à son modèle que s'il y a des contradictions dans la géométrie hyperbolique, il y en a aussi dans la géométrie euclidienne.

Donc si on sûr de la géométrie euclidienne, il en va de même pour la géométrie hyperbolique. Mais la communauté scientifique était plutôt dans le doute concernant la géométrie hyperbolique, d'où une crise concernant les fondements de la géométrie.

Or la consistance de la géométrie se réduit à celle de l'analyse qui se réduit à celle de l'arithmétique.

D'où le besoin de démontrer la consistance de l'arithmétique dans l'arithmétique sans avoir besoin d'ajouter « autre chose ».

Et c'est à cette question que Gödel répondit mais négativement.

AU SUJET DU THÉORÈME DE GÖDEL

Il y a des vérités indémontrables comme lorsqu'on regarde un film, qu'en tant que spectateur on a vu qui a commis le crime mais que l'accusé sort innocent de son procès.

Les vérités indémontrables en mathématiques pour un système d'axiomes donné consistent à dire que certaines vérités ne sont pas démontrables à l'intérieur de ce système d'axiomes.

Chez Kant, dans a critique de la raison pure, il y a déjà le principe du théorème de Gödel.

Les idées transcendantales (de Dieu, de l'âme etc.) provoquent des contradictions c'est-à-dire de l'inconsistance. Si la raison voulait être complète (et appréhender les idées transcendantales) alors elle doit être inconsistante (et générer des antinomies).

Imaginons un système ne permettant de démontrer que la validité de propositions, et soit une proposition « moi, je ne suis pas démontrable », cette proposition est vraie et n'est pas démontrable…

LA NOTION DE VÉRITÉ

C’est la quête des logiciens. Le paradoxe du menteur en est devenu un symbole, montrant d’ailleurs que la notion de vérité pose problème et peut être n’est même pas définissable.

Comment tenter de la définir dans le cadre de la logique formelle (ce que fit Platon), logique propositionnelle avec les connecteurs (travail des stoïciens) et la logique prédicative avec les quantificateurs (Tarski)

Tarski réussit à traduire l’algèbre de Boole pour la logique prédicative avec la théorie des modèles, et développe une école de la sémantique.

Il y a essentiellement deux théorèmes de Tarski :

Le premier affirme que la vérité est définissable de façon relative, et le deuxième affirme qu’elle ne l’est pas de façon absolue, de façon analogue à la démonstrabilité.

Il est ainsi nécessaire de définir au préalable le langage dans lequel on exprime la vérité.

Quand on demande ce qu’est la vérité, on ne peut pas l’exprimer dans le langage lui-même mais dans un métalangage.

La vérité dans un langage n’est jamais exprimable dans le langage lui-même mais dans un métalangage.

Tarski répond ainsi à la vieillesse question de Pilate envers Jésus : « Qu’est-ce que la vérité ? »

TURING

Les travaux de Turing furent fortement influencés par la seconde guerre mondiale. Il participa ainsi à décoder les messages allemands. En effet, Turing put ainsi réaliser en pratique ce qu'il avait imaginé dans sa thèse de doctorat : le principe d'un ordinateur.

Evidemment les simples codages par substitution furent abandonnés bien avant, les Américains avaient utilisé la langue Navajo.

Il développe ensuite la morphogénèse. Comme Von Neumann, il pense que Gödel ne fut pas le premier à développer ses idées, mais la nature ou Dieu lui-même !

Si on veut construire une carte parfaite d'un territoire. Mais sur la carte, il devra y avoir la carte elle-même. Il y aura un point fixe entre la carte et le territoire.

ORDINATEUR

La logique propositionnelle a un théorème de complétude : Tout ce qui est vrai est démontrable.

Les théorèmes sont uniquement les tautologies. Il suffit donc à partir de tables de vérités, d’établir qu’une proposition est bien tautologique.

La logique prédicative ne permet pas de se résumer à des tables de vérité.

Hilbert avait mentionné au congrès de Bologne deux problèmes la complétude et la décidabilité de la logique prédicative. Le premier problème fut résolu par Gödel, le deuxième par : Church et Turing de façon indépendante. Ils répondent par la négative. Si la logique prédicative est complète alors elle n’est pas décidable.

Mais qu’est-ce qu’être décidable ?

Pour Turing, ce qui est décidable est ce qui est calculable par un ordinateur. Il y a tout de même des limites pour un ordinateur liées au formalisme à l’origine de l’ordinateur lui-même, d’où encore des limites d’auto-référencement.

Turing se demanda également jusqu’à quel point un ordinateur pourrait être proche d’un esprit humain.

Il inventa le teste dit de Turing pour distinguer une machine d’un homme.

Aujourd’hui, il semble possible de simuler la rationalité humaine mais pas son irrationnalité !

HILBERT, BROUWER

Les Grecs avaient un amour particulier pour la règle et le compas. Certains problèmes comme doubler la surface d'un carré peuvent se résoudre de cette façon mais d'autres comme la trisection de l'angle pose problème, la quadrature du cercle ou doubler le volume d'un cube.

L'histoire des mathématiques recense ainsi beaucoup de démonstration de non-constructibilité, comme encore la résolution d'équations de degré supérieur à 4 avec des radicaux.

Brouwer considère que c'est un problème d'avoir ces démonstrations « en creux ».

Par exemple, quel sens y-a-t-il à démontrer l'existence de quelque chose en supposant que cette chose n'existe pas et aboutir à une erreur ?

Théorème de la base de Hilbert : Hilbert démontra sans exhiber l'existence de base d'espaces vectoriels ce qui énerva Kronecker pour qui il s'agissait plus de religion que de mathématiques !