

DM n°1

Instructions (valables pour l'ensemble de l'année) :

Il est naturellement indispensable d'effectuer un travail préparatoire au brouillon.
Le travail en groupe est conseillé mais la rédaction de la copie est INDIVIDUELLE.

Exercice n°1 (sur 3 points)

On pose pour tout entier supérieur ou égal à 1 : $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^3}$ (On précise que $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{(n-1)^3} + \frac{1}{n^3}$, la somme des inverses des cubes des entiers de 1 à n)

- 1) Justifier que (u_n) est croissante.
- 2) Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur à 1 : $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$
- 3) Que peut-on conclure ?

Exercice n°2 (sur 4 points)

Les deux questions sont indépendantes.

1) Equations d'inconnue x

a) Résoudre l'équation : $|x+5|=|3-2x|$

b) Soient a et b deux réels non nuls, résoudre : $\frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x+a+b}$

2) Montrer qu'il n'existe pas d'entiers strictement compris entre $\sqrt{n(n+2)}$ et $n+1$.

Exercice n°3 (sur 5 points) : L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui vérifient: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + xf(1-x) = 1+x$ (E₁)

1) Soit f une fonction solution, c'est-à-dire une fonction qui vérifie (E₁).

a) Déterminer f(0), puis $f(\frac{1}{2})$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(1-x) + (1-x)f(x) = 2-x$. On note cette égalité (E₂).

c) A l'aide (E₁) et (E₂), déterminer une expression de f(x) valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Conclure.

Exercice n°4 (sur 3 points)

Soient A, B et C trois ensembles tels que : $A \cup B = B \cap C$

- 1) Montrer que : $A \subset B$
- 2) Montrer que : $B \subset C$

Exercice n°5 (sur 5 points)

Soient P et Q deux assertions logiques, on définit l'opérateur $P \downarrow Q$ par $\overline{P \text{ ou } Q}$

- 1) Construire la table de vérité de $P \downarrow Q$ (en d'autres termes de $\overline{P \text{ ou } Q}$)
- 2) Montrer que \overline{P} peut s'exprimer uniquement avec P et \downarrow
- 3) En déduire (P ou Q) uniquement à l'aide de P, Q et \downarrow
- 4) En déduire (P ET Q) uniquement à l'aide de P, Q et \downarrow
- 5) Exprimer (P \Rightarrow Q) uniquement à l'aide de P, Q et \downarrow