Colle sur le chapitre n°2 **« Calculs algébriques »**

<u>En vrac</u>

1) Vrai ou faux ?
   a) Pour n$\in \mathbb{N}$, $(2n+1)!$ Est impair
   b) Pour tout (a,b) $\in \mathbb{R}^2, a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
   c) Pour tout n,p entiers naturels non nuls, $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} k^j = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} k^j$
   d) Pour tout n,p entiers naturels non nuls, $\frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} = \binom{n}{p}$
2) Calculer pour n entier naturel non nul, $\sum_{k=1}^{n} 2^k$
3) Calculer pour n entier naturel non nul, $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^k$

<u>Exercice n°1</u>

Soit n$\in \mathbb{N}$, calculer :

A $= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i+j)$ B $= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(ij)$ C $= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} max(i,j)$

<u>Exercice n°2</u>

1) Par télescopage, calculer, pour n entier naturel non nul, S $= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$
2) Calculer pour n entier naturel non nul, calculer P $= \prod_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})$

<u>Exercice n°3</u>

Résoudre le système suivant d'inconnue (x,y,z)$\in \mathbb{R}^3$, $\begin{cases} x-y+z=1 \\ y+z=1 \\ 2x+3y+7z=1 \end{cases}$

<u>Exercice n°4</u>

1) Pour n entier naturel non nul, on pose $P_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}$ et $I_n = \sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k-1}$
   En considérant $P_n + I_n$ et $P_n - I_n$ calculer P_n et I_n
2) Pour n entier naturel non nul, calculer $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k^2$

<u>Problème:</u>

Le but de ce problème est de calculer dans la première partie $\sum_{k=1}^{n} k^2$, et dans la seconde partie $\sum_{k=1}^{n} k^3$

<u>Première partie</u> : Pour n entier naturel non nul, on définit $S_n = \sum_{k=1}^{n}((k+1)^3-k^3)$

1) Calculer S_n (on coupera la somme en deux, on fera un changement d'indice afin d'obtenir des sommes télescopiques)
2) Exprimer à présent S_n en fonction de $\sum_{k=1}^{n} k^2$ (on développera $(k+1)^3-k^3$)
3) En déduire $\sum_{k=1}^{n} k^2$

<u>Deuxième partie</u> : Pour n entier naturel non nul, on définit $T_n = \sum_{k=1}^{n}((k+1)^4-k^4)$

1) Calculer T_n en remarquant qu'elle est télescopique
2) Exprimer T_n en fonction de $\sum_{k=1}^{n} k^3$
3) En déduire $\sum_{k=1}^{n} k^3$