Chapitre 1 Probabilités conditionnelles

Ce n'est qu'en essayant continuellement que l'on finit par réussir, donc plus ça rate, plus on a de chances que ça marche.

La fusée interplanétaire des Shadoks n'était pas très au point, mais ils avaient calculé qu'elle avait quand même une chance sur un million de marcher. Et ils se dépêchaient de bien rater les 999999 premiers essais pour être sûrs que le millionième marche.

Jacques Rouxel (1931-2004).

I Probabilité conditionnelle

Définition 1 (Probabilité conditionnelle) — Soit A et B deux évènements d'un univers Ω, avec A de probabilité non nulle. La **probabilité de B sachant A** est le nombre noté $\mathbf{P}_A(B)$ défini par :

Il correspond à la probabilité que l'évènement B soit réalisé quand on sait que l'évènement A l'est.

☞ **Exemple 1** On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Quelle est la probabilité que le chiffre obtenu soit 6 sachant que ce chiffre est pair ?

Proposition 9.1 (Probabilité d'une intersection) — *Soit A et B deux évènements d'un univers Ω, avec A de probabilité non nulle. Alors :*

Proposition 9.2 (Probabilité d'une intersection) — *Si $\mathbf{P}(B) \neq 0$, on a aussi :*

Ainsi, si $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et $\mathbf{P}(B) \neq 0$:

☞ **Exemple 2** On considère une urne qui contient des boules numérotées. On sait que 3/4 des boules sont rouges et que 1/3 des boules rouges portent un numéro pair. On tire une boule au hasard dans l'urne.
Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge portant un numéro pair ?

II Arbres pondérés

Proposition 9.3 (Règles de calculs sur les arbres pondérés) —

- *Loi des nœuds : La somme des probabilités des branches partant d'un même nœud est égale à 1.*
- *La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches qui composent ce chemin.*

☞ **Exemple 3**
On considère une urne qui contient exactement 5 boules : 3 boules rouges et deux boules noires. On effectue successivement et sans remise deux tirages au hasard d'une boule dans l'urne. On note les évènements :

- R_1 : « la première boule tirée est rouge ».
- R_2 : « la seconde boule tirée est rouge ».

Représenter cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré et calculer les probabilités de R_1 et R_2.

III Événements indépendants

Définition 2 (Évènements indépendants) — Deux évènements A et B d'un univers Ω sont dits **indépendants** si la réalisation de B ne dépend pas de la r réalisation (ou non) de A. Cela signifie que :

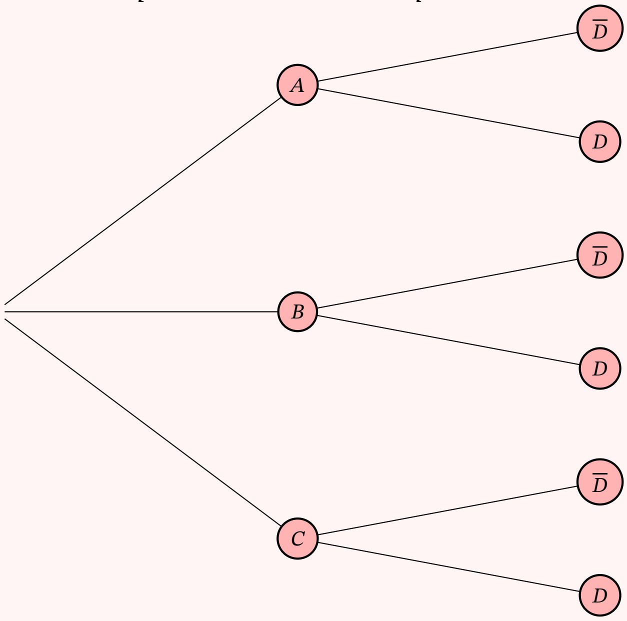
Remarque 1 Cette définition est symétrique : A est indépendants de B si et seulement si B est indépendant de A, comme on peut le voir autrement avec la proposition suivante.

Proposition 9.4 — *Deux évènements A et B d'un univers Ω sont **indépendants** si et seulement si :*

☞ **Exemple 4** On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On considère les évènements A : « On obtient un chiffre pair », B : « On obtient un chiffre supérieur ou égal à 4 » et C : « On obtient un chiffre inférieur ou égal à 4 ».

IV Formule des probabilités totales

Proposition 9.5 — *Sur un arbre pondéré, la probabilité d'un évènement D situé sur le dernier niveau de branche est la somme des probabilités des chemins qui mènent à D. Par exemple, sur l'arbre ci-dessous :*



La probabilité de D est :

$$\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}(A \cap D) + \mathbf{P}(B \cap D) + \mathbf{P}(C \cap D).$$

ou encore :

$$\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}_A(D) + \mathbf{P}(B) \times \mathbf{P}_B(D) + \mathbf{P}(C) \times \mathbf{P}_C(D).$$

V Exercices

Lire un tableau à double entrée

1 Vrai ou Faux ?

Le tableau recense les élèves d'un lycée.

	Externes	Demi-pensionnaires	Total
Filles	150	90	240
Garçons	150	110	260
Total	300	200	500

a. 48 % des élèves sont des filles. ☐ V ☐ F

b. 30 % des élèves sont externes. ☐ V ☐ F

c. 30 % des élèves sont des filles externes. ☐ V ☐ F

d. La moitié des externes sont des filles. ☐ V ☐ F

e. La moitié des filles sont externes. ☐ V ☐ F

Calculer des probabilités

2 On choisit une forme au hasard parmi les suivantes :

On note R l'événement « la forme choisie est rouge » et C l'événement « la forme choisie est un carré ».

a. Calculer la probabilité que la forme choisie soit rouge.

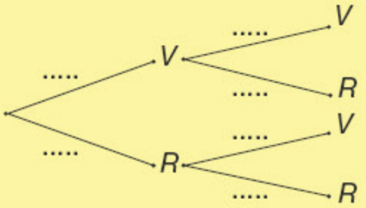
b. Exprimer par une phrase les événements $\overline{R}$, $\overline{C}$, $R \cap C$, et $R \cup C$.

c. Calculer leurs probabilités.

Utiliser un arbre pondéré

3 Un sac contient trois boules vertes et deux boules rouges. On prend une boule au hasard, on note sa couleur, on la remet dans le sac puis on en tire une deuxième. On note V l'événement « on tire une boule verte » et R l'événement « on tire une boule rouge ».

a. Compléter l'arbre pondéré suivant :



b. Calculer la probabilité de tirer deux boules vertes.

c. Calculer la probabilité de tirer deux boules de la même couleur.

Simuler une expérience aléatoire

4 Expliquer ce que fait le programme suivant.

```
from random import*
def piece():
    if random()<0.5:
        return("Pile")
    else:
        return("Face")
piles = 0
for n in range(1000):
    if piece()=="Pile":
        piles = piles+ 1
print(piles)
```

Arbres et conditionnement

♦ **PC.1** Un service après-vente a constaté que les retours d'un appareil sont dus dans 30% des cas à une panne A, dans 40% des cas à une panne B et dans 3% des cas à la simultanéité des deux pannes.

On note A l'évènement : «l'appareil a la panne A». On note B l'évènement : «l'appareil a la panne B».

1) Traduire, à l'aide des évènements A et B, les données de l'énoncé en terme de probabilités.

2) Un appareil choisi au hasard présente la panne A, quel est la probabilité qu'il ait aussi la panne B ?

3) Un appareil choisi au hasard présente la panne B, quel est la probabilité qu'il ait aussi la panne A ?

4) Est-ce que le fait d'avoir la panne A est indépendant du fait d'avoir la panne B ?

♦ **PC.2** Dans un groupe de personnes, 40% sont des hommes. De plus 20% des hommes et 30% des femmes ont les yeux bleus.

On choisit une personne au hasard dans ce groupe.

On note H l'événement : «c'est un homme». On note B l'événement : «la personne a les yeux bleus».

1) Traduire, à l'aide des évènements H et $\overline{H}$ et B, les données de l'énoncé en terme de probabilités.

2) Quelle est la probabilité que la personne choisie soit un homme aux yeux bleus ?

3) Quelle est la probabilité que la personne choisie soit une femme aux yeux bleus ?

♦ **PC.3** 45% des élèves d'un lycée sont des filles, parmi les filles 30% sont demi-pensionnaires et parmi les garçons, 40% sont externes.

On note F l'événement : «c'est une Fille». On note E l'événement : «la personne est Externe».

1) Traduire les données de l'énoncé en termes de probabilités.

2) Construire un arbre de probabilité.

3) On interroge au hasard un élève de ce lycée, calculer la probabilité que cet élève soit une fille externe.

4) Calculer la probabilité que l'élève interrogé soit externe.

♦ **PC.4** Un laboratoire a mis au point un alcootest pour contrôler le taux d'alcoolémie. Les essais ont montré que 96% des personnes en état d'ébriété ont un alcootest positif et que 98% des personnes sobres ont un alcootest négatif.

Cet alcootest est utilisé dans une population parmi laquelle on sait que 5% des personnes sont en état d'ébriété, le reste de la population étant sobre.

On contrôle au hasard une personne de la population et on note :

— E l'évènement «la personne contrôlée est en état d'ébriété ».

— S l'évènement «la personne contrôlée est sobre ».

— A l'évènement «la personne contrôlée est un alcootest positif ».

— $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.

1) Interpréter à l'aide de probabilités chacune des données de l'énoncé.

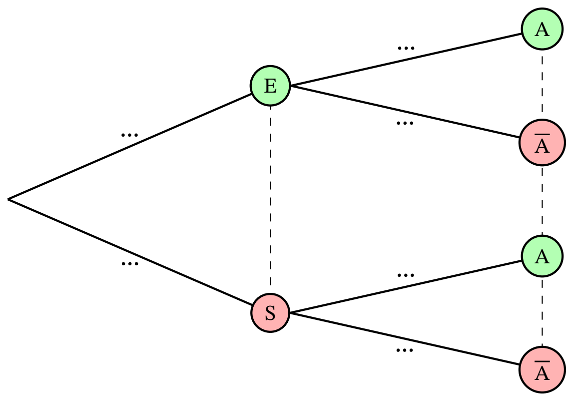
2) Recopier et compléter l'arbre à la fin de l'exercice.

3) a) Traduire à l'aide d'une phrase l'évènement $E \cap A$ puis calculer sa probabilité.

b) Calculer la probabilité $\mathbf{P}(S \cap A)$.

c) Calculer $\mathbf{P}(A)$, à quoi correspond cette probabilité ?

4) Sachant que la personne contrôlée a un alcootest positif, calculer la probabilité qu'elle soit en état d'ébriété. *On donnera une valeur approchée à 0,001 près.*



♦ **PC.5** Soit A et B deux évènements d'une expérience aléatoire. Les probabilités des évènements B et $A \cap B$ sont données par les égalités :

$$\mathbf{P}(B) = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(A \cap B) = \frac{2}{5}.$$

1) Calculer $\mathbf{P}_B(A)$.

2) La probabilité de B sachant A est $\frac{2}{3}$. En déduire la probabilité de A.

3) Déterminer $\mathbf{P}(A \cup B)$.

♦ **PC.6** Un sac S_1 contient 9 boules dont 5 rouges et un sac S_2 contient 5 boules dont 3 sont rouges. On choisit un sac au hasard et on tire une boule au hasard dans ce sac.
Par abus, on note S_1 : « Choisir le sac S_1 » et R : « Tirer une boule rouge ».

1) Représenter l'expérience par un arbre pondéré.

2) Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge et provienne du sac S_1 ?

3) Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?

4) Sachant que la boule tirée est rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne du sac S_1 ?

♦ **PC.7** Des étudiants sont inscrits en L1 dans une université. À l'approche des examens, un stage de révision est organisé. L'expérience montre que les 3/4 des étudiants ayant suivi le stage de révision réussissent leurs examens et 1/3 des étudiants n'ayant pas suivi le stage ne réussissent pas leurs examens. On sait de plus que 20% des étudiants de L1 suivent le stage de révision.
On choisit un étudiant au hasard et on considère les évènements :

- S : « l'étudiant a suivi le stage de révision » ;
- E : « l'étudiant a réussi ses examens ».

1) Construire un arbre de probabilité traduisant la situation étudiée.

2) Si l'étudiant choisi a suivi le stage, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas réussi ses examens ?

3) Quelle est la probabilité que l'étudiant choisi ait suivi le stage et réussi ses examens ?

4) Montrer que la probabilité que l'étudiant choisi ait réussi ses examens est $\frac{41}{60}$.

5) Sachant que l'étudiant choisi a réussi ses examens, quelle est la probabilité qu'il ait suivi le stage ? On donnera la valeur exacte sous forme de fractions irréductibles puis une valeur arrondie à 10^{-2} près.