Chapitre 1

Suites numériques

Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur finie, de manière à en différer aussi peu qu'on voudra, cette dernière est appelée limite de toutes les autres.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

I Rappels

1.1.1 Définition générale

Définition 1 (Suite) — Une suite numérique u est une fonction de $\mathbf{N}$ (quelques fois de $\mathbf{N}^*$) dans $\mathbf{R}$, c'est-à-dire une application qui à tout entier naturel n associe un nombre réel $u(n)$, noté généralement u_n.

Ainsi u : $\begin{cases} \mathbf{N} \to \mathbf{R} \\ n \mapsto u_n \end{cases}$

L'ensemble des suites de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$ est noté $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

☞ **Exercices TD 1.1 et TD 1.2.**

1.1.2 Suites arithmétiques

☞ **Apprendre la fiche sur les suites arithmétiques.**

Définition 2 (Suite arithmétique) — On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que pour tout entier n :

$$u_{n+1} - u_n = r.$$

r est alors appelé la **raison** de la suite.

☞ **Exemple 1**

- Si $u_n = 4n$ alors $u_{n+1} - u_n = 4$ donc u est arithmétique de raison 4.
- La suite de terme général $w_n = n^2$ n'est pas arithmétique car $w_2 - w_1 = 2^2 - 1^2 = 3$ et $w_1 - w_0 = 1^2 - 0^2 = 1$.

Proposition 1.1 (Variations d'une suite arithmétique) — *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors :*

- *si $r = 0$ alors (u_n) est constante ;*
- *si $r > 0$ alors (u_n) est strictement croissante ;*
- *si $r < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante.*

Proposition 1.2 (Rappels suites arithmétiques) —

♦ *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.*
Alors pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leqslant n$; on a :

$$u_n = u_p + (n-p)r.$$

En particulier, si $p = 0$ on a :

$$u_n = u_0 + nr.$$

♦ *On a pour tout entier n non nul :*

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

♦ *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.*
Alors pour tous entiers n et p tels que $p \leqslant n$:

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + \ldots + u_n = \frac{(u_n + u_p)(n-p+1)}{2}.$$

En particulier, si $p = 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{(u_n + u_0)(n+1)}{2}.$$

☞ **Exercices TD 1.3 et TD 1.5.**

1.1.3 Suites géométriques

☞ **Apprendre la fiche sur les suites géométriques.**

Définition 3 (Suite géométrique) — On dit qu'une suite est **géométrique** s'il existe un réel q tel que pour tout entier n :

$$u_{n+1} = qu_n.$$

q est alors appelé la **raison** de la suite.

☞ **Exemple 2**
- Si $u_n = 4^n$ alors $u_{n+1} = 4 \times 4^n = 4 \times u_n$ donc u est géométrique de raison 4.
- La suite w de terme général $w_n = n^2$ n'est pas géométrique.

Proposition 1.3 (Variations d'une suite géométrique) — *Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$. Alors :*
- *si $q = 0$ alors (u_n) est constante à partir du rang 1 ;*
- *si $q = 1$ alors (u_n) est constante ;*
- *si $q > 1$ alors (u_n) est strictement croissante si $u_0 > 0$, strictement décroissante si $u_0 < 0$;*
- *si $0 < q < 1$ alors (u_n) est strictement décroissante si $u_0 > 0$, strictement croissante si $u_0 < 0$;*
- *si $q < 0$ alors (u_n) n'est pas monotone.*

Proposition 1.4 (Rappels suites géométriques) —

♦ *Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.*
Alors pour tous entiers naturels n et p tels que $p \leqslant n$; on a :

$$u_n = q^{n-p}u_p.$$

En particulier, si $p = 0$ on a :

$$u_n = q^n u_0.$$

♦ *On a pour tout entier n et pour tout réel $q \neq 1$:*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

♦ *Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0.*
Alors pour tous entiers n et p tels que $p \leqslant n$:

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}.$$

En particulier, si $p = 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

☞ **Exercices TD 1.4 et TD 1.6.**

☞ **Exercices SN.1 à SN.6.**

☞ **Apprendre la fiche sur la représentation des suites récurrentes.**

☞ **Exercices SN.7 et SN.8.**

☞ **Apprendre la fiche sur les variations des suites.**

☞ **Exercices SN.9 à SN.14.**

II Raisonnements par récurrence

Suivant la façon de construire l'ensemble des entiers naturels **N**, le résultat suivant peut être vu comme un axiome ; il existe différentes manière de formuler le **principe de récurrence**. Je fais le choix de le présenter comme une conséquence d'autres axiomes.

Théorème 1.5 (Formulation du principe de récurrence, admis) — *Soit $P(n)$ une propriété dépendant de l'entier naturel n. On suppose qu'on a les deux assertions suivantes :*
- *$P(0)$ est vraie, (**initialisation**)*

- *pour tout $k \in \mathbf{N}$, $P(k)$ implique $P(k+1)$, (**hérédité**).*

Alors $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

☞ **Exemple 3 (Applications pratiques du principe de récurrence)**

- Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n+1}. \end{cases}$

  Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
- Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = u_n + 2n + 3. \end{cases}$

  Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = (n+1)^2$.
- Montrer que $P(n)$: « $5^{n+1} \geqslant 4^n + 3^n$ » est vraie pour tout entier naturel n.
- Montrer que $Q(n)$: « $5^n \geqslant 4^n + 3^n$ » est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$.

☞ **Exercices SN.18 à SN.24.**

III Convergence, divergence

1.3.1 Vocabulaire

Définition 4 (Croissance, minoration, majoration) —

- On dit qu'une suite (u_n) est **croissante** (resp. strictement croissante) si pour tout entier n :
$$u_n \leqslant u_{n+1} \qquad (\text{resp.} \quad u_n < u_{n+1})$$
- On dit qu'une suite (u_n) est **décroissante** (resp. strictement décroissante) si pour tout entier n :
$$u_n \geqslant u_{n+1} \qquad (\text{resp.} \quad u_n > u_{n+1})$$
- On dit que u_n est **majorée** par un réel M si pour tout entier n :
$$u_n \leqslant M$$
- On dit que u_n est **minorée** par un réel m si pour tout entier n :
$$m \leqslant u_n$$
- On dit que u_n est **bornée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier n :
$$|u_n| \leqslant M$$

Remarque 1 Si (u_n) est une suite majorée par M, alors tout réel supérieur à M majore aussi (u_n) ; par exemple si pour tout entier n, $u_n \leqslant 1$, alors on a aussi $u_n \leqslant 2$.
De même, si (u_n) est inférieur à m, tout minorant inférieur à m minore aussi (u_n).

1.3.2 Convergence dans R

Définition 5 (Convergence d'une suite) — On dit qu'une suite (u_n) **converge vers un réel** ℓ (sous-entendu lorsque n tend vers $+\infty$), si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
Les formulations suivantes sont par définition équivalentes :

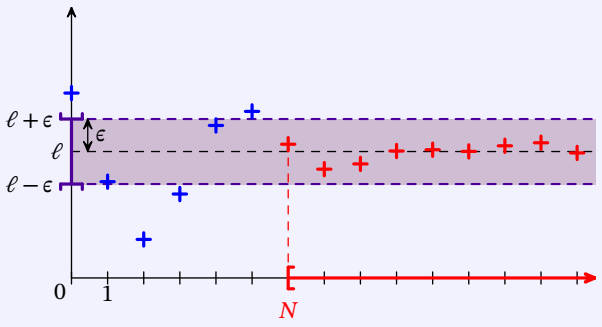
- (u_n) converge vers ℓ ;
- (u_n) admet ℓ comme limite ;
- (u_n) tend vers ℓ.

Définition 6 (Définition formelle de la convergence) —

On dit que (u_n) **converge vers un réel** ℓ si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N},\qquad n \geqslant N \ \Rightarrow\ |u_n - \ell| < \epsilon.$$

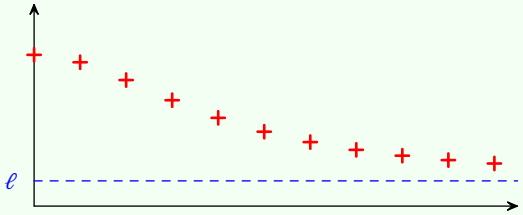
On note dans ce cas $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.



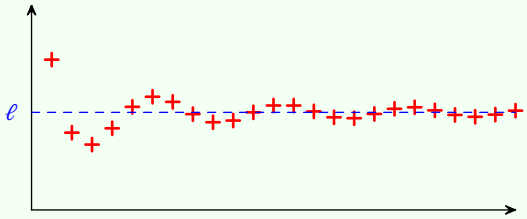
Remarque 2 on ne peut rien déduire d'une représentation graphique ! Seuls les vérifications à partir de la définition et les propriétés et théorèmes permettent de déduire qu'une suite converge.

☞ **Exemple 4 (Exemples de suites convergentes)**

$$u_n = 1 + \frac{5}{(n/4)^2 + 1}$$



$$u_n = 1 + \frac{\cos n}{n}$$



Proposition 1.6 (Unicité de la limite) — *Si (u_n) est une suite convergente, sa limite ℓ est* ***unique****.*

Proposition 1.7 (Exemple fondamental) — *La suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$ converge vers 0.*

Théorème 1.8 (Fondamental, convergence monotone, admis) — *Toute suite réelle décroissante et minorée converge. De même, toute suite croissante et majorée converge.*

Remarque 3 Attention, $u_n = \dfrac{1}{n}$ est décroissante et minorée par -1, mais converge vers 0. Avoir un minorant ne garantit pas que ce même minorant soit la limite de la suite !

1.3.3 Divergences vers l'infini

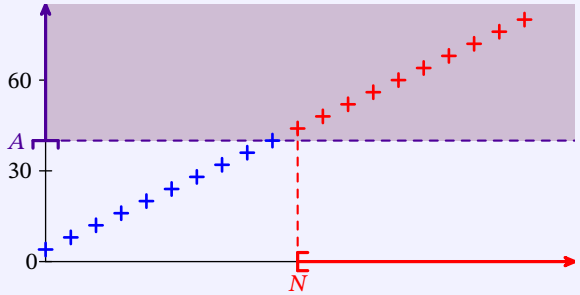
Définition 7 (Divergence) — Une suite (u_n) non convergente est dite **divergente**.

Définition 8 (Divergences vers $+\infty$) —

On dit qu'une suite (u_n) tend vers $+\infty$ (ou **diverge vers** $+\infty$) si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang, autrement dit si :

$$\forall A \in \mathbf{R},\quad \exists N \in \mathbf{N},\quad n \geqslant N \ \Rightarrow\ u_n > A.$$

Exemple : $u_n = 4n + 4$

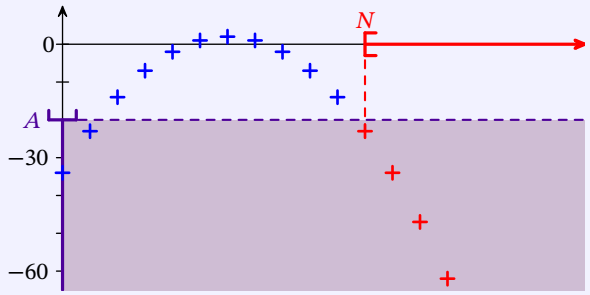


Définition 9 (Divergence vers $-\infty$) —

De même, on dit qu'une suite (u_n) tend vers $-\infty$ (ou **diverge vers** $-\infty$) si tout intervalle de la forme $]-\infty;A[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang, autrement dit si :

$$\forall A \in \mathbf{R}, \quad \exists N \in \mathbf{N}, \quad n \geqslant N \;\Rightarrow\; u_n < A.$$

Exemple : $u_n = 2-(n-6)^2$



Proposition 1.9 (Exemple fondamental) — *Soit a et b deux réels. Si pour tout entier naturel n, $u_n = an+b$, alors :*

- *Si $a>0$, (u_n) tend vers $+\infty$;*
- *Si $a<0$, (u_n) tend vers $-\infty$;*
- *Si $a=0$, (u_n) tend vers b.*

Théorème 1.10 (Un critère de divergence vers l'infini) — *Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$. De même, toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.*

IV Limites usuelles admises pour l'instant

Proposition 1.11 (Limites usuelles) — *Si k est un entier strictement positif :*

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Théorème 1.12 (Limite de q^n) — *Soit $q \in \mathbf{R}$. Alors :*

- *Si $q>1$, (q^n) tend vers $+\infty$;*
- *Si $-1<q<1$, (q^n) tend vers 0 ;*
- *Si $q=1$, (q^n) tend vers 1 ;*
- *Si $q\leqslant -1$, (q^n) n'admet pas de limite.*

☞ **Exercice SN.25.**

V Opérations sur les limites

Dans les tableaux des **produits** et **quotients**, lorsque « ∞ » est mentionné, la règle des signes s'applique au résultat.

1.5.1 Somme de suites

Proposition 1.13 (Admis) —

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+w_n$						

1.5.2 Produit de suites

Proposition 1.14 (Admis) —

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$	ℓ'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times w_n$				

1.5.3 Quotient de suites

Proposition 1.15 (Admis) —

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	$\ell \neq 0$ *ou* ∞	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$	$\ell' \neq 0$	∞	$\ell' \neq 0$	0 *et* w_n *de signe constant*	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{w_n}$						

☞ **Exercices SN.26 à SN.28.**

VI Comparaison de limites

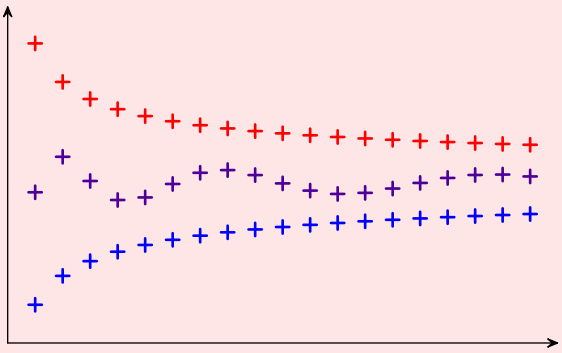
1.6.1 Cas de convergence

Théorème 1.16 (Théorème des gendarmes) —

Si (u_n), (v_n), (w_n) sont trois suites telles que :

- *À partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$;*
- *(u_n) et (w_n) convergent vers ℓ.*

Alors (v_n) converge, et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.



☞ **Exercice SN.31.**

Proposition 1.17 (Ordre des limites) — *Si (u_n) et (v_n) sont deux suites tels qu'à partir d'un certain rang, on a $u_n \leqslant v_n$, et que (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers ℓ', alors $\ell \leqslant \ell'$.*
En particulier, si pour tout n, $u_n \leqslant M$ et que (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell \leqslant M$.

Proposition 1.18 (Ordre des limites, cas d'inégalité stricte) — *Si (u_n) et (w_n) sont deux suites tels qu'à partir d'un certain rang, on a $u_n < v_n$, et que (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers ℓ', alors $\ell \leqslant \ell'$.*

Proposition 1.19 (Cas d'une suite monotone convergente) — *Si (u_n) est une suite croissante et convergente vers ℓ, alors pour tout entier n on a $u_n \leqslant \ell$.*
De même, si (u_n) est une suite décroissante et convergente vers ℓ, alors pour tout entier n on a $u_n \geqslant \ell$.

1.6.2 Cas de divergence

Théorème 1.20 — *Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant w_n$, alors :*
- *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$;
- *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Proposition 1.21 (Limites usuelles) — *Si k est un entier strictement positif :*

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Théorème 1.22 (Limite de q^n) — *Soit $q \in \mathbf{R}$. Alors :*

- *Si $q > 1$, (q^n) tend vers $+\infty$;*
- *Si $q = 1$, (q^n) tend vers 1 ;*
- *Si $-1 < q < 1$, (q^n) tend vers 0 ;*
- *Si $q \leqslant -1$, (q^n) n'admet pas de limite.*

VII Compléments

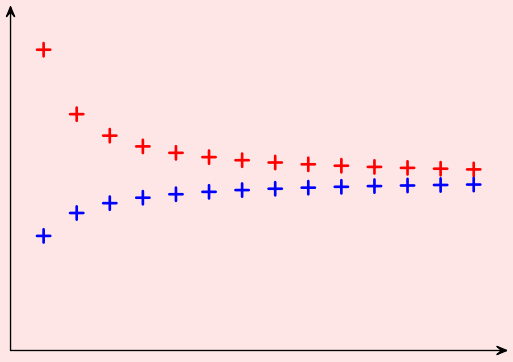
1.7.1 Suites adjacentes

Théorème 1.23 (Suites adjacentes) —

Si (u_n) et (w_n) sont deux suites telles que :
- *pour tout entier n, $u_n \leqslant w_n$;*
- *(u_n) est croissante, et (w_n) est décroissante ;*
- $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n - u_n = 0$.

Alors on dit que (u_n) et (w_n) sont ***adjacentes****.*
De plus, on a alors :
- *(u_n) et (w_n) convergent ;*
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Illustration :



☞ **Exemple 5** Démontrer que les suites de terme général $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$ et $w_n = u_n + \dfrac{1}{n \times n!}$ sont convergentes et convergent vers la même limite.

1.7.2 Méthode de Héron

La méthode de Héron permet de calculer des valeurs approchées de racines carrées.
Si $a \in \mathbf{R}$ est le réel strictement plus grand que 1 dont on veut calculer une valeur approchée de la racine carrée, on considère la suite (x_n) :

$$\begin{cases} x_0 = \lfloor \sqrt{a} \rfloor \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} \end{cases} \quad \text{(pour tout entier naturel } n\text{)}.$$

Théorème 1.24 (Convergence de la méthode de Héron) — *La suite (x_n) converge vers $\sqrt{a}$ et cette convergence est quadratique, c'est-à-dire que pour tout entier n :*

$$\left|x_{n+1} - \sqrt{a}\right| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}} \left|x_n - \sqrt{a}\right|^2.$$

VIII Exercices

Révisions - suites de référence

Dans la lignée des premiers exercices de révision, plusieurs exercices pour être au point sur les suites arithmétiques et géométriques.

♦ **SN.1** Pour chacune des suites définies sur $\mathbf{N}$ ci-dessous, dire si elle est arithmétique, géométrique ou ni l'un ni l'autre. On précisera, la cas échéant, la raison et le premier terme.

1) $u_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

2) $u_n = \dfrac{n^2+3n+2}{n+2}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

3) $u_n = 7 \times 2^{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

4) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5u_n + 5 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

5) $u_n = \dfrac{6^{n+2}}{5^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

♦ **SN.2** On donne deux termes d'une suite arithmétique. Donner le terme général u_n et calculer u_4.

1) $u_5 = 4$, $u_{10} = 49$;

2) $u_6 = 17$, $u_{10} = 15$;

3) $u_{10} = 90$, $u_{100} = 99$.

♦ **SN.3** On donne deux termes d'une suite géométrique de raison positive. Donner le terme général de u_n et calculer u_4.

1) $u_1 = -4$, $u_2 = -28$;

2) $u_5 = \dfrac{1}{3}$, $u_7 = \dfrac{1}{27}$;

3) $u_{10} = 8$, $u_8 = 2$.

♦ **SN.4** On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $q = -2$. Calculer la somme $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_{20}$.

♦ **SN.5** Une suite (u_n) est géométrique de raison $q \geqslant 0$. On sait que $u_4 = 10$ et $u_6 = 20$. Calculer la somme

$S = u_{50} + u_{51} + \ldots + u_{100}$.

♦ **SN.6** Calculer les sommes suivantes :

- $S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 998 + 999$;
- $S_2 = 2006 + 2007 + \ldots + 9999$;
- $S_3 = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 999$;
- $S_4 = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \ldots + 4096$;
- $S_5 = 1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 59049$;
- $S_6 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^{28}}$;
- $S_7 = 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 4096$;
- $S_8 = -3 + 9 - 27 + 81 - \cdots + 6561 - 19683$.

Représentation de suites récurrentes

Comme vu en première, on peut représenter graphiquement les termes d'une suite définies par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, voici deux exercices sur ce point.

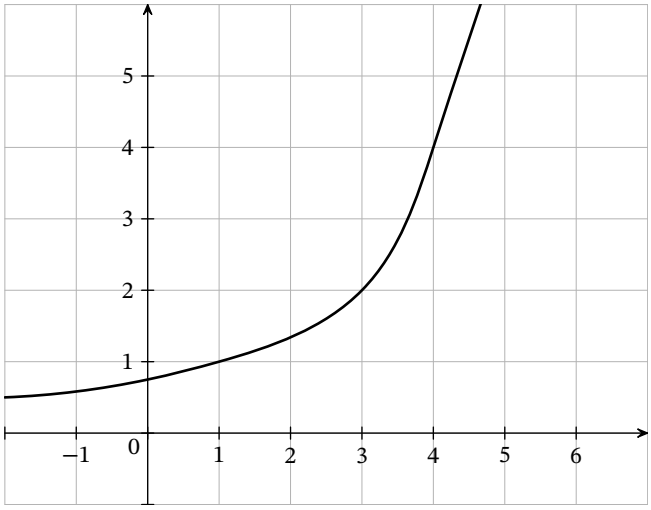
♦ **SN.7** Soit v la suite définie par :

$$\begin{cases} v_0 = a \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases} \quad \text{Pour tout } n \in \mathbf{N}$$

où g est la fonction dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

1) Placer les 4 premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses pour $a = 3{,}5$.

2) Conjecturer le sens de variation de la suite v selon les valeurs de a.



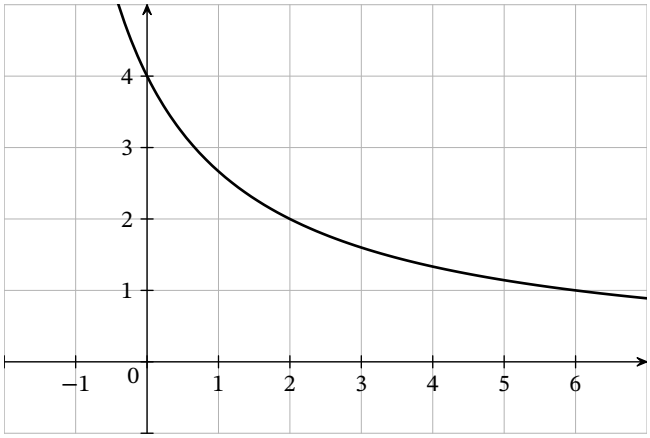
♦ **SN.8** Soit w la suite définie par :

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n+1} = h(w_n) \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N},$$

où h est la fonction définie par :

$$h(x) = \frac{8}{x+2}.$$

On donne ci-dessous une partie de la représentation graphique de h :



1) Placer les 5 premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.

2) Que peut-on conjecturer sur les variations de w ?

3) Que se passe-t-il si $w_0 = -6$?

Sens de variation

Deux mini-exercices pour se remémorer les résultats sur les suites de référence.

♦ **SN.9** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite arithmétique de raison 4. Quelles sont les variations de (u_n) ?

♦ **SN.10** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

1) Peut-on donner les variations de (u_n) avec seulement cette information ?

2) Si on suppose que $u_0 = -3$, quelles sont les variations de (u_n) ?

Un premier exercice avec la méthode $u_{n+1} - u_n$.

♦ **SN.11** Soit u la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 - n + 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

1) Pour tout entier n, exprimer $u_{n+1} - u_n$.

2) Quel est le signe de l'expression précédente ?

3) Que peut-on en déduire pour le sens variation de la suite u ?

Un second exercice avec la méthode $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

♦ **SN.12** Soit v la suite définie sur $\mathbf{N}$ par :

$$v_n = \frac{5}{8^n}.$$

1) Justifier que tous les termes de v_n sont strictement positifs.

2) Calculer, pour tout entier n, $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.

3) Comparer le quotient précédent à 1.

4) Que peut-on en déduire pour le sens de variation de la suite v ?

♦ **SN.13** On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_n = n^2 - 8n + 17.$$

On propose deux façons de faire pour étudier les variations de (u_n).

Première méthode.

1) Calculer $u_{n+1} - u_n$.

2) En étudiant le signe de l'expression obtenue, en déduire que (u_n) est croissante à partir du rang $n = 4$.

Seconde méthode.

1) Étudier les variations de la fonction

$$f : x \mapsto x^2 - 8x + 17,$$

soit en utilisant le cours sur les fonctions du second degré, soit en dérivant la fonction f.

2) En déduire que (u_n) est croissante à partir du rang $n = 4$.

♦ **SN.14** On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_n = \frac{1}{n^2+1}.$$

Déterminer son sens de variation.

Python

♦ **SN.15** On considère la suite (u_n) telle que :

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{1}{3^n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

1) Calculer u_1 et u_2.

2) On souhaite écrire une fonction **terme** en Python qui renvoie la valeur de u_n avec n comme argument. On considère la fonction suivante :

```
1  def terme(n):
2      u=8
3      for i in range(1,n):
4          u=1/5*u+1/(3**i)
5      return(u)
```

a) Que renvoie **terme**(2) ?

b) Expliquer pourquoi cette fonction ne convient pas et proposer une modification pour obtenir la fonction voulue.

♦ **SN.16** On considère la suite (u_n) telle que :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - n + 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Compléter la fonction **somme** ci-dessous de telle sorte qu'elle renvoie la somme des n premiers termes de la suite (u_n) lorsqu'on l'exécute en prenant n comme argument.

```
def somme(n):
    u=...
    s=...
    k=...
    while ... :
        u=...
        s=...
        k=...
    return(s)
```

♦ **SN.17** On considère la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Écrire une fonction **termev** en Python qui renvoie la valeur de v_n lorsqu'on l'exécute avec n en argument.

Récurrence

♦ **SN.18** Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{v_n}{1 + v_n}.$$

1) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n > 0$.

2) On définit la suite (u_n) pour tout $n \in \mathbf{N}$ par

$$u_n = \frac{1}{v_n}.$$

a) Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique.

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'expression de u_n puis celle de v_n en fonction de n.

♦ **SN.19** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n - 3.$$

Les deux questions de cet exercice permettent d'obtenir l'expression de u_n en fonction de n, par deux méthodes différentes.

1) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = 3 - 2^n.$$

2) On définit la suite (v_n) pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $v_n = u_n - 3$.

a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'expression de v_n puis celle de v_n en fonction de n puis retrouver le résultat de la question 1.

♦ **SN.20** Si n est un entier naturel non nul, on pose

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

1) Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4.

2) Exprimer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, S_{n+1} en fonction de S_n.

3) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

♦ **SN.21** Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note S_n la somme des n premiers entiers naturels impairs :

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1).$$

1) a) Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4. Quelle conjecture peut-on faire ?

b) Démontrer la conjecture précédente par récurrence.

2) En utilisant une suite arithmétique, retrouver directement le résultat de la question **??**.

3) Comment peut-on visualiser la propriété démontrée ?

♦ **SN.22** Soit $a \in]0,1[$. On considère la suite définie par $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$.

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$0 < u_n < 1.$$

♦ **SN.23** Soit $a \in]0,1[$. On considère la suite définie par $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$.

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$0 < u_n < 1.$$

♦ **SN.24** (**Sommes remarquables**)

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Études et limites

Dans cette partie, on va par ordre croissant de difficulté.

♦ **SN.25** Donner la limite (si elle existe !) de chaque suite :

1) $u_n = 2 + \frac{1}{n}$;
2) $u_n = \frac{1}{1+n+n^2}$;
3) $u_n = 5n - 5$;
4) $u_n = 8 - n$;
5) $u_n = 2 \times 3^n$;
6) $u_n = \frac{-5}{4^n}$;
7) $u_n = n^2 + \frac{1}{n}$;
8) $u_n = n^3 - n^2$.

☞ **Indications exercice 25 :** pour le numéro **??**, on factorisera par n^3.

♦ **SN.26** Donner la limite (si elle existe !) de chaque suite :

1) $u_n = \frac{2n+5}{n+1}$;
2) $u_n = \sqrt{n+1}$.
3) $u_n = \frac{\frac{5}{n}+7}{8+\frac{2}{n}}$;
4) $u_n = -7n^3 + 5n + 3$;
5) $u_n = \frac{2}{n^2-4}$.
6) $u_n = \frac{\left(\frac{5}{7}\right)^n}{\frac{1}{n^2}-9}$.
7) $u_n = \frac{5n^2+n}{n^2+4n}$;
8) $u_n = 5 \times \left(\frac{185}{192}\right)^n$;
9) $u_n = \frac{\left(\frac{7}{5}\right)^n}{\left(\frac{4}{3}\right)^n}$;

♦ **SN.27** Déterminer les limites des suites de terme général suivants :

- $a_n = \frac{\sqrt{n}+\cos(n)}{n^2+n+1}$;
- $b_n = n^5 + \sqrt{\frac{n+1}{1+n^2}} - 10$;
- $c_n = \frac{3n^2+5}{2n}$;
- $d_n = \frac{1-w_n}{2-w_n}$ où la suite (w_n) vérifie :
  - $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2$;
  - $\forall n \in \mathbf{N}, \quad w_n > 2$.

♦ **SN.28** Déterminer les limites des suites de terme général suivants :

- $a_n = \frac{\sin(n^2+n) - 5\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+2}$;
- $b_n = n^3 - \sqrt{\frac{n^2+1}{n+n^3}} - 5$;
- $c_n = \frac{3n^3+4n^2}{8n^3}$;
- $d_n = \frac{1-u_n}{u_n+5}$ où la suite (u_n) vérifie :
  - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -5$;
  - $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n > -5$.

♦ **SN.29** Soit u la suite définie sur $\mathbf{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 9 \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

1) Démontrer que la suite u n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2) Soit v la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par :

$$v_n = u_n + 3.$$

a) Démontrer que v est une suite géométrique.
b) En déduire le terme général de v puis celui de u.
c) En déduire si u admet une limite.
3) a) Calculer la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
b) S_n admet-elle une limite ?

♦ **SN.30** Soit u la suite définie sur $\mathbf{N}$ par :

$$u_n = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 3.$$

1) u est-elle monotone ?
2) Déterminer si u admet une limite.
3) Pour tout entier naturel p, on pose $v_p = u_{2p}$. Démontrer que v est décroissante.
4) Pour tout entier naturel p, on pose $w_p = u_{2p+1}$. Démontrer que w est croissante.
5) Démontrer que pour tout entier p :

$$v_p - w_p = \frac{3}{2^{2p}}.$$

♦ **SN.31** En utilisant la méthode la plus adaptée, déterminer pour chacune des suites de terme général ci-dessous :

- son sens de variation ;
- sa limite si elle existe.

1) $u_n = 3n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$, $(n \in \mathbf{N}^*)$
On pourra montrer que $\forall n \in \mathbf{N}^*$,
$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{2}{3}u_n$, *puis que* $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} u_1$.
2) $u_n = \frac{2^{2n+2}}{3^n}$.

3) $u_n = \dfrac{0{,}5^n}{n}$, $(n \in \mathbf{N}^*)$.
On pourra remarquer que $0 \leqslant u_n \leqslant 0{,}5^n$.

♦ **SN.32** James Bond joue au poker contre LeChiffre, malfrat international qui utilise ses gains pour ses riches clients.
Lors d'une « main » dans cette partie de poker, James est seul face à LeChiffre, les autres joueurs ayant trop peur de perdre leur argent face à ce redoutable adversaire.
James et LeChiffre jouent de la façon suivante :

- James débute la main en misant 200 euros, c'est la première mise ;
- LeChiffre décide de faire une « relance » en misant 2 fois cette somme, plus 150 euros (pour tenter d'intimider James) ; c'est la deuxième mise ;
- James décide alors de faire sa première relance en misant 2 fois la somme que vient de déposer LeChiffre dans le pot, plus 150 euros ; c'est la troisième mise ;
- Et ils poursuivent ainsi de suite.

Pour un entier naturel n non nul, on note u_n la n−ième mise de cette main. Ainsi, $u_1 = 200$.

1) Quelle est la valeur de u_2 ? De u_3 ?
2) (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
3) Expliquer pourquoi pour tout entier non nul n on a :

$$u_{n+1} = 2u_n + 150.$$

4) Compléter l'algorithme suivant pour calculer la valeur u_n pour une valeur de n donnée :

```
def mise_u(n):
    u=.....
    for i ..................:
        u=.....
    return .....
```

5) De combien LeChiffre relance-t-il à **sa** 6ème relance ?
6) On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $w_n = u_n + 150$.
a) Démontrer que (w_n) est géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
b) Montrer que pour tout entier non nul n on a :

$$u_n = 350 \times 2^{n-1} - 150.$$

7) Quelle est la somme totale dans le pot après la n-ième mise ?
8) LeChiffre jette l'éponge après la p-ième relance de James. Combien LeChiffre perd-il au total ?

Récurrence et limites

♦ **SN.33** (**Polynésie 2023 sujet 1**) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0{,}9u_n - 0{,}3.$$

1) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = 2 \times 0{,}9^n - 3.$$

2) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $-3 < u_n \leqslant -1$.
3) Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
4) Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

♦ **SN.34** (**DS 2020**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 8}$.

1) a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n > 0$.
b) En déduire les variations de la suite (u_n).
c) Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?
2) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$u_n \leqslant \frac{7}{8^n}.$$

b) En déduire la limite de (u_n).
c) Justifier qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$u_n < 10^{-18}.$$

d) Compléter le programme Python suivant pour qu'il renvoie la valeur n_0.

```
u=...
n=...
while ......... :
    n=...
    u=...
print(...)
```

e) Donner alors la valeur n_0.
3) Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par

$$v_n = 1 + \frac{7}{u_n}.$$

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 8 dont on précisera le premier terme.
b) Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \dfrac{7}{8^{n+1} - 1}$.
c) Retrouver à partir de son expression, la limite de la suite (u_n).

♦ **SN.35** (**Inégalité de Bernoulli**) Démontrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel n et tout $x > -1$ on a :

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

♦ **SN.36** (**Importance des deux hypothèses**)

1) Montrer que la proposition « $10^n+(-1)^n$ est divisible par 11 » , notée $P(n)$ où $n \in \mathbf{N}$, est *héréditaire*.

2) Montrer que $P(0)$ et $P(1)$ sont fausses.
Peut-on en déduire que $P(2)$ est fausse ?

3) Montrer que la proposition « $10^n-(-1)^n$ est divisible par 11 » , où $n \in \mathbf{N}$, est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

4) En déduire que $P(n)$ est fausse pour tout entier naturel n. *On remarquera que* $10^n+(-1)^n = 10^n-(-1)^n+2\times(-1)^n$.

BAC

♦ **SN.37 (Amérique du Nord sujet 2 2024)** On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$g(x) = 2x - x^2.$$

1) Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 &= \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} &= g(u_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

2) Calculer u_1 et u_2.

3) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

4) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

5) Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

6) Recopier et compléter le script Python ci-contre afin que celui-ci renvoie le rang n à partir duquel la suite dépasse 0,95.

```
def seuil() :
    n=0
    u=0.5
    while u < 0.95 :
        n=...
        u=...
    return n
```

♦ **SN.38 (Centres étrangers 2024 Sujet 1)** On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

1) a) Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;1]$,

$$f'(x) = 2(1-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

b) Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

2) a) Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1.$$

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

♦ **SN.39 (Amérique du Nord 2017)** Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel $n > 0$, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs.

On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n). Elle vérifie donc trois propriétés :

- $u_0 > 1$,
- pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 0$,
- pour tout $n > 0$, $u_0+u_1+\cdots+u_{n-1} = u_0\times u_1\times\cdots\times u_{n-1}$.

1) On choisit $u_0 = 3$. Déterminer u_1 et u_2.

2) Pour tout entier $n > 0$, on note $s_n = u_0+u_1+\cdots+u_{n-1} = u_0\times u_1\times\cdots\times u_{n-1}$.
On a en particulier $s_1 = u_0$.

a) Vérifier que pour tout entier $n > 0$, $s_{n+1} = s_n + u_n$ et $s_n > 1$.

b) En déduire que pour tout entier $n > 0$,

$$u_n = \frac{s_n}{s_n - 1}.$$

c) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n > 1$.

3) À l'aide de l'algorithme ci-dessous, on veut calculer le terme u_n pour une valeur de n donnée.

a) Recopier et compléter la partie traitement de l'algorithme ci-dessous.

Entrée : Saisir n
Saisir u
Traitement : s prend la valeur u
Pour i allant de 1 à n :
  u prend la valeur ...
  s prend la valeur ...
Fin Pour
Sortie : Afficher u

b) Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de u_n pour différentes valeurs de l'entier n :

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

4) a) Justifier que pour tout entier $n > 0$, $s_n > n$.

b) En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n).

♦ **SN.40 (Asie 2016)** Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.

La société met en place le dispositif industriel suivant.

Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.

L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

Les parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A - Premier modèle – avec une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 1\,000 \\ u_{n+1} = 1{,}2u_n - 100 \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

1) a) Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé.

On précisera en particulier ce que représente u_n.

b) L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

c) On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente.

Recopier et compléter cet algorithme.

Variables	u et n sont des nombres

Traitement	u prend la valeur 1 000
	n prend la valeur 0
	Tant que ..... faire
	  u prend la valeur .....
	  n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher .....

2) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1\,000$.

b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

3) On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

b) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie B - Second modèle – avec une fonction

On verra plus tard.

♦ **SN.41 (Centres étrangers 2015)** Soit a un nombre réel fixé non nul.

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad \text{et, pour tout } n \text{ de } \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \mathrm{e}^{2u_n} - \mathrm{e}^{u_n}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire : $u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n}(\mathrm{e}^{u_n} - 1)$.

1) Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - x.$$

a) Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x : $g'(x) = (\mathrm{e}^x - 1)(2\mathrm{e}^x + 1)$.

b) Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

c) En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

2) Dans cette question, on suppose que $a \leqslant 0$.

a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 0$.

b) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

c) Dans le cas où a vaut 0, donner la limite de la suite (u_n).

3) Dans cette question, on suppose que $a > 0$.

La suite (u_n) étant croissante, la question 1. permet d'affirmer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant a$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n \geqslant g(a)$.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$u_n \geqslant a + n \times g(a)$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4) Dans cette question, on prend $a = 0{,}02$.

L'algorithme suivant a pour but de déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > M$, où M désigne un réel positif. Cet algorithme est incomplet.

Variables	n est un entier, u et M sont deux réels
Initialisation	u prend la valeur 0,02 n prend la valeur 0 Saisir la valeur de M
Traitement	Tant que ... ... Fin tant que
Sortie	Afficher n

a) Sur la copie, recopier la partie « Traitement » en la complétant.

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur que cet algorithme affichera si $M = 60$.

♦ **SN.42** (**Sujet 1 EDS 2020**) La suite (u_n) est définie sur **N** par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n + 1 \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

1) Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

2) L'extrait reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableau présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,5625
5	3	3,421875
6	4	4,31640625

a) Quelle formule, étirée vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?

b) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

3) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$n \leqslant u_n \leqslant n+1.$$

b) En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

c) Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = 1$.

4) On désigne par (v_n) la suite définie sur **N** par

$$v_n = u_n - n.$$

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n.$$

♦ **SN.43** (**Sujet 2 EDS 2020**) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n. \end{cases}$$

Dans toute la suite de l'exercice, **on admet** que les suites (u_n) et (v_n) **sont strictement positives**.

1) a) Calculez u_1 et v_1.

b) Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel n,

$$v_n \geqslant 1.$$

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \geqslant n+1.$$

d) En déduire la limite de la suite (u_n).

2) On pose, pour tout entier naturel n :

$$r_n = \frac{v_n}{u_n}.$$

On admet que :

$$r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^n}{u_n^2}.$$

a) Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$-\frac{1}{u_n^2} \leqslant \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leqslant \frac{1}{u_n^2}.$$

b) En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}.$$

c) Déterminer la limite de la suite (r_n^2) et en déduire que r_n converge vers $\sqrt{2}$.

d) Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$r_{n+1} = \frac{2+r_n}{1+r_n}.$$

e) On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
1  def seuil():
2      n=0
3      r=1
4      while abs(r-sqrt(2))>10**(-4):
5          r=(2+r)/(1+r)
6          n=n+1
7      return n
```

(**abs** désigne la valeur absolue, **sqrt** la racine carrée et **10**(-4)** représente 10^{-4})
La valeur n renvoyée par ce programme est 5.
À quoi correspond-elle ?

Autres

♦ **SN.44** (**Sommes télescopiques**) On pose pour tout entier $k \geqslant 1$: $a_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

1) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

2) En déduire que $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ converge et donner sa limite.

On considère de même $b_k = \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

1) Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right).$$

2) En déduire que $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ converge et donner sa limite.

♦ **SN.45** (**Une autre somme**)

1) Montrer que pour tout entier naturel k :

$$\frac{4k}{4k^4+1} = \frac{2k^2+2k+1-(2k^2-2k+1)}{(2k^2+2k+1)(2k^2-2k+1)}.$$

2) En déduire que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{4k^4+1}$$

converge et donner sa limite.

♦ **SN.46** ($\lim u_n w_n = 1$) Soient (u_n) et (w_n) deux suites telles que $\lim u_n w_n = 1$ et pour tout entier n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et $0 \leqslant w_n \leqslant 1$.

1) Montrer que pour tout entier n :
$0 \leqslant u_n w_n \leqslant u_n$ et $0 \leqslant u_n w_n \leqslant w_n$.

2) En déduire que (u_n) et (w_n) convergent vers 1.

♦ **SN.47** (**Convergente donc bornée**) En revenant à la définition de la convergence, démontrer que toute suite réelle convergente est bornée.