Fiche 1 | Second degré

I - Rappels

Définition 1 (Fonction du second degré) — Toute fonction f définie sur $\mathbf{R}$ et pouvant s'écrire pour tout réel x :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (\text{où } a \neq 0)$$

est appelée **fonction polynômiale (ou fonction polynôme) du second degré**, ou simplement, **fonction du second degré**.

Définition 2 — L'expression algébrique

$$ax^2 + bx + c \qquad (\text{où } a \neq 0)$$

est appelée **trinôme du second degré**.

Définition 3 — La courbe représentative d'une fonction du second degré est une **parabole**.

II - Formes des trinômes du second degré

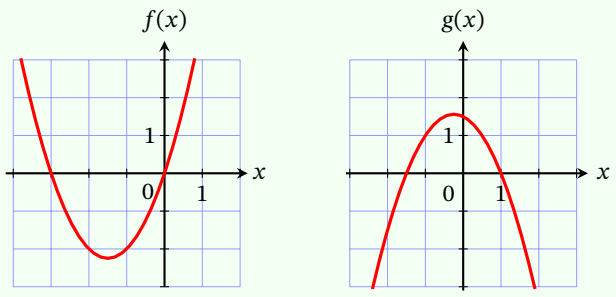
1 Forme développée

Définition 4 — L'écriture $f(x) = ax^2+bx+c$ est la **forme développée** de f.

La forme développée sert à mettre en évidence la forme de la courbe du trinôme (« vers le haut » si $a > 0$, « vers le bas » si $a < 0$), et à avoir les limites du trinôme en plus et moins l'infini.

☞ **Exemple 1**

$f(x) = x^2 + 3x$ $\qquad$ $g(x) = -x^2 - 0{,}5x + 1{,}5$



2 Forme canonique

Théorème 1.1 (forme canonique) — *Toute fonction polynôme du second degré définie par*

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

et telle que $a \neq 0$ peut s'écrire de façon unique sous la forme :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} \alpha = -\dfrac{b}{2a} \\ \beta = f(\alpha) = -\dfrac{b^2-4ac}{4a}. \end{cases}$$

*Le réel b^2-4ac est appelé le **discriminant** du trinôme et est noté Δ.*

☞ **Exemple 2 (Forme canonique)** Je propose deux façons de calculer la forme canonique d'un trinôme, prenons par exemple

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 1.$$

Première façon :
On suit le théorème précédent « bêtement » : ici $a = 2$, $b = -4$ et $c = 1$ donc :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = 1.$$

Ainsi : $f(x) = 2(x-1)^2 + \beta$. Calculons β :
$f(\alpha) = f(1) = -1$. Donc finalement :

$$f(x) = 2(x-1)^2 - 1.$$

Deuxième façon :
Cette deuxième méthode demande plus de dextérité en calcul littéral mais est très efficace et permet de comprendre d'où viennent les formules pour α et β.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 4x + 1 \\ &= 2\Big(\underbrace{x^2 - 2x}_{\text{début de } (x-1)^2} + \frac{1}{2}\Big) && \textit{Factorisation par } a \\ &= 2\Big((x-1)^2 - 1 + \frac{1}{2}\Big) && \textit{Technique du début de carré} \\ &= 2\Big((x-1)^2 - \frac{1}{2}\Big) \\ &= 2(x-1)^2 - 1. \end{aligned}$$

*La forme canonique sert à mettre en évidence le **sommet de la courbe** du trinôme ainsi que ses **variations**.*

0.1 *Interprétation géométrique de la forme canonique*

Proposition 1.2 (sommet et axe de symétrie d'une parabole) — *Avec les notations de la propriété précédente, la parabole définie par la courbe de la fonction f a pour sommet le point S de coordonnées (α,β).*
*De plus, la parabole de sommet $S(\alpha,\beta)$ est **symétrique** par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$ $\left(\text{on rappelle que } \alpha = -\dfrac{b}{2a}\right)$.*

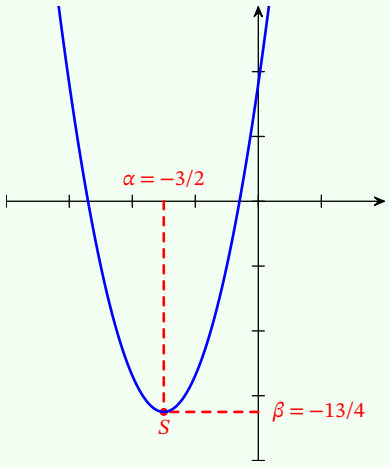
☞ **Exemple 3** On considère la fonction définie par

$$f(x) = x^2 + 3x - 1.$$

On calcule : $\begin{cases} \alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{3}{2} \\ \beta = f(\alpha) = -\dfrac{b^2-4ac}{4a} = -\dfrac{13}{4} \end{cases}$

Ainsi : $f(x) = \left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{13}{4}$.

Le sommet S de la parabole a donc pour coordonnées $\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{13}{4}\right)$ et cette parabole a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -\dfrac{3}{2}$.



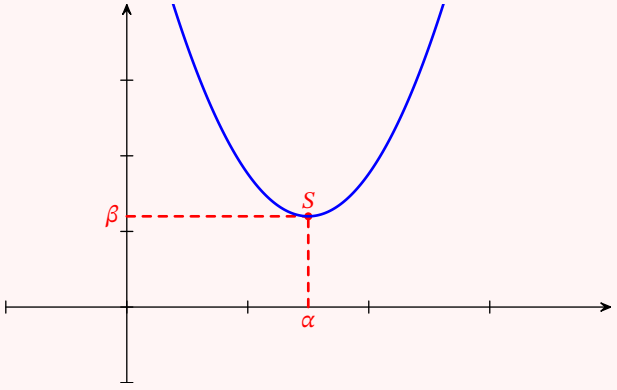
0.2 *Sens de variation*

Proposition 1.3 (Sens de variation) — *Si f est un polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ tel que $a \neq 0$, les variations de f dépendent du signe de a.*

Si on pose comme précédemment $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = -\dfrac{b^2-4ac}{4a}$, le tableau de variations de f est le suivant :

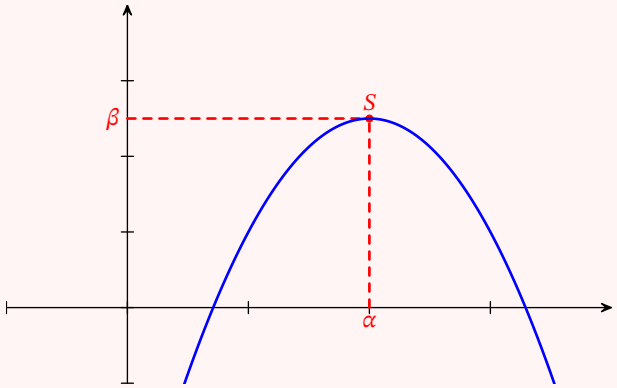
Cas où $a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variations de f		β	



Cas où $a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variations de f		β	



☞ **Exemple 4 (Sens de variations de trinômes)** Déterminons le sens de variations de la fonction suivante définie sur **R** :

$$f(x) = x^2 + 8x + 1.$$

On calcule la forme canonique de f qui est :

$$f(x) = (x+4)^2 - 15.$$

On obtient donc directement :

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
Variations de f		-15	

3 Forme factorisée

Proposition 1.4 (factorisation) — *Si f est définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ alors sa factorisation dépend du signe du discriminant Δ :*

- *Si $\Delta < 0$ f* ***ne peut pas*** *être factorisée comme produit de polynômes du premier degré (dans* **R***).*
- *Si $\Delta = 0$, alors on a :*

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

- *Si $\Delta > 0$, alors en notant x_1 et x_2 les racines de f, on a :*

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2),$$

où $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

La forme factorisée sert à mettre en évidence les ***racines*** *et le* ***signe*** *du trinôme. Elle sert aussi à résoudre les* ***équations du second degré****.*

☞ **Exemple 5 (Factorisation)** Factorisons (si possible) l'expression ci-dessous :

$$f(x) = x^2 + x + 1.$$

On calcule $\Delta = 1 - 4 = -3$, donc $\Delta < 0$, donc f **ne peut pas être factorisée** dans **R**.

0.1 *Équations du second degré*

Définition 5 (Équation du second degré) — Une équation du second degré est une équation équivalente à la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

où $a \neq 0$.

0.2 *Ensemble des solutions*

Théorème 1.5 (Ensemble des solutions) — *On note S l'ensemble des solutions de l'équation*

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad où \quad a \neq 0.$$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$. L'ensemble des solutions (dans **R***) est déterminé par le signe du discriminant Δ :*

- *Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de solution :*

$$S = \varnothing.$$

- *Si $\Delta = 0$, l'équation a une unique solution :*

$$S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}.$$

- *Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes :*

$$S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}.$$

Définition 6 (racines) — On appelle **racines** de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ les solutions de cette équation.
Les solutions de l'équation $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ sont appelées **racines** de f ou **zéros** de f.

☞ **Exemple 6 (Équation du second degré)** Déterminons les solutions de l'équation ci-dessous :

$$2x^2 + 8x - 10 = 0.$$

Ici, le réflexe à avoir est de se demander si calculer Δ en vaut la peine. Aucun des coefficients du trinôme n'est nul donc c'est en général le cas ici :

$$\Delta = 64 + 4 \times 2 \times 10 = 144.$$

$\Delta > 0$ donc on applique le théorème précédent : il y a deux solutions à l'équation $2x^2 + 8x - 10 = 0$ qui sont :

- $x_1 = -2 - 3 = -5$,
- $x_2 = -2 + 3 = 1$.

Remarque 1 Aller voir la dernière partie pour apprendre une façon plus simple de trouver ces racines dans ce cas un peu particulier !

0.3 *Signe d'une fonction polynômiale du second degré*

Proposition 1.6 (Signe d'un trinôme) — *Soit f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (où $a \neq 0$) et $\Delta = b^2 - 4ac$.*
On note x_1 et x_2 les racines de f si $\Delta > 0$, et x_0 l'unique racine de f si $\Delta = 0$.
Le tableau (figure 1) à la fin de la fiche récapitule les tableaux de signe possibles.

☞ **Exemple 7 (Inéquation du second degré)** Résolvons l'inéquation suivante :

$$2x^2 - x - 1 > 0.$$

On calcule le discriminant Δ :

$$\Delta = 1 + 4 \times 1 \times 2 = 9.$$

$\Delta > 0$ donc on applique la proposition :

- $x_1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$,
- $x_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.

x	$-\infty$		$-1/2$		1		$+\infty$
$2x^2 - x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Il faut maintenant revenir à l'inéquation de départ : les solutions sont donc $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup]1; +\infty[$.

III - Racines, somme, produit

Théorème 1.7 (Racines et coefficients) — *On considère l'équation (où $a \neq 0$) :*

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Si cette équation admet deux solutions qu'on note x_1 et x_2, alors :

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

☞ **Exemple 8** Reprenons l'équation que l'on a déjà résolue :

$$2x^2 + 8x - 10 = 0.$$

Si on est attentif, on peut se rendre compte que 1 est solution évidente car :

$$2 + 8 - 10 = 0.$$

Ainsi, si on note x_2 l'autre racine de l'équation, on a

$$1 \times x_2 = \frac{-10}{2} = -5.$$

d'où immédiatement cette deuxième racine !

☞ **Exemple 9** Sachant que l'équation $x^2+3x-10=0$ admet 2 comme solution, on peut immédiatement trouver -5 comme autre racine de cette équation.

Théorème 1.8 (Somme et produit) — *On considère deux nombres réels x_1 et x_2 et on note s leur somme ($s=x_1+x_2$) et p leur produit ($p=x_1x_2$). Alors x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation :*

$$x^2-sx+p=0.$$

☞ **Exemple 10** Peut-on déterminer deux nombres dont la somme vaut 7 et le produit vaut 10?... Ce sont les racines de l'équation $x^2-7x+10=0$!

Je laisse les résultats suivants indiqués mais ils sortent un peu du cadre de la Première/Terminale G.

Théorème 1.9 (Racine et factorisation, admis) — *Soit P une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbf{R}$, c'est-à-dire qu'il existe a_0, a_1,..., a_n des réels tels que :*

$$\forall x\in\mathbf{R},\quad P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0.$$

Alors si α est une racine de P alors il existe un polynôme Q tel que

$$\forall x\in\mathbf{R},\quad P(x)=(x-\alpha)Q(x).$$

☞ **Exemple 11** En remarquant que 2 est racine de x^3+2x^2-5x-6, trouver toutes les solutions éventuelles de l'équation $x^3+2x^2-5x-6=0$.

Proposition 1.10 — *Pour tout réel x et tout entier n non nul, on a :*

$$x^n-1=(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1\right).$$

De même, pour tous réels a, x et tout entier n non nul, on a :

$$x^n-a^n=(x-a)\left(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1}\right).$$

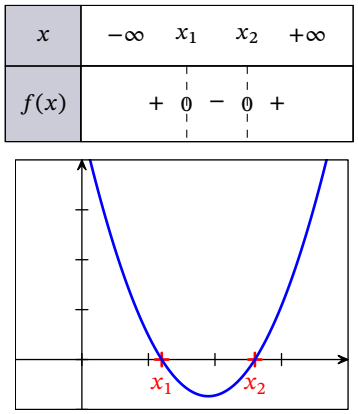
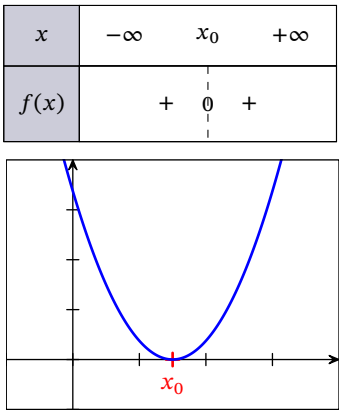
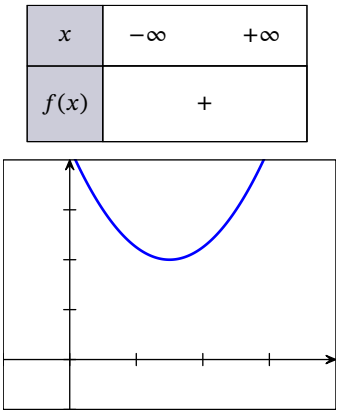
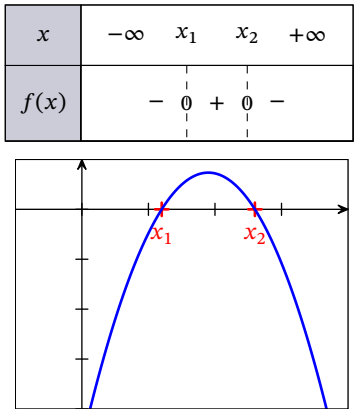
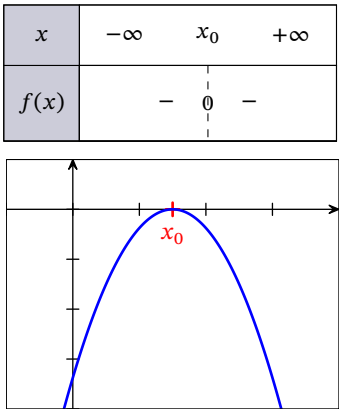
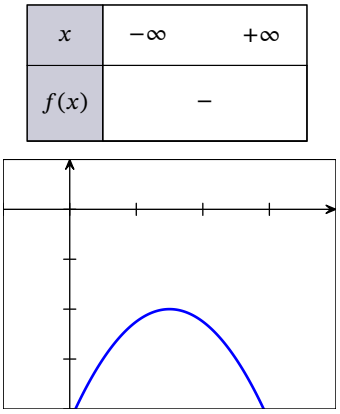
	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

FIGURE 1 – Tableau récapitulant le signe d'un trinôme.