

1 Définition

Définition 1 (Suite arithmétique) — On dit qu'une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que pour tout entier n :

$$u_{n+1} - u_n = r.$$

Dans ce cas, la valeur obtenue est appelée la **raison** de la suite.

2 Montrer qu'une suite est arithmétique

Méthode 3.1

Comment montrer qu'une suite est arithmétique ?

On calcule $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n et on montre que la valeur obtenue est constante.

☞ **Exemple 1** Montrer que la suite définie par $u_n = 5n + 2$ est arithmétique.

☞ **Correction exemple 1** : Si $u_n = 5n + 2$ alors pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 5(n+1) + 2 - (5n + 2) \\ &= 5n + 5 + 2 - 5n - 2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est arithmétique de raison 5.

Remarque 1 Il n'est pas étonnant que la suite précédente soit arithmétique, puisqu'on a la proposition suivante qui nous indique quelles sont ces suites. *En pratique*, une fois que l'on a montré qu'une suite est arithmétique, on utilise la proposition pour écrire u_n de manière **explicite** en fonction de n (c'est-à-dire, écrire u_n comme une formule directement en fonction de n).

☞ **Exemple 2 (Liban 2013)** On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} v_0 &= 1 \\ v_{n+1} &= \frac{9}{6-v_n} \end{cases}$$

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}.$$

1) Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

☞ **Correction exemple 2** : Calculons, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{v_{n+1} - 3} - \frac{1}{v_n - 3} \\ &= \frac{1}{\frac{9}{6-v_n} - 3} - \frac{1}{v_n - 3} \\ &= \frac{1}{\frac{3v_n - 9}{6-v_n}} - \frac{1}{v_n - 3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{6-v_n}{3v_n-9} - \frac{3}{3v_n-9} \\ &= \frac{3-v_n}{3v_n-9} \\ &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

3 Montrer qu'une suite n'est pas arithmétique

Méthode 3.2

Comment montrer qu'une suite **n'est pas** arithmétique ?

Il faut montrer qu'il existe un entier naturel k tel que $u_{k+2} - u_{k+1} \neq u_{k+1} - u_k$. En pratique, les premières valeurs de la suite (u_n) permettent souvent de conclure.

☞ **Exemple 3** Montrer que la suite définie par $u_n = n^2$ n'est pas arithmétique.

☞ **Correction exemple 3** : Si $u_n = n^2$ alors : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 4$.

- $u_2 - u_1 = 3$;
- $u_1 - u_0 = 1$.

La suite (u_n) n'est donc pas arithmétique.

4 Lien avec l'expression explicite

Méthode 3.3

Comment déterminer une expression explicite d'une suite arithmétique ?

Proposition 3.1 (Caractérisation des suites arithmétiques) — Il y a équivalence entre les énoncés suivants :

- (u_n) est une suite arithmétique de raison r ;
- pour tout entier naturel n :

$$u_n = rn + u_0,$$

et de manière plus générale, pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$:

$$u_n = (n - p)r + u_p.$$

DÉMONSTRATION : Une petite récurrence.

☞ **Exemple 4 (Liban 2013, suite)**

2) En déduire l'expression de (w_n) , puis celle de (v_n) en fonction de n .

☞ **Correction exemple 4** : On sait que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$ donc d'après la proposition précédente, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}
 w_n &= w_0 - \frac{1}{3}n \\
 &= \frac{1}{v_0 - 3} - \frac{1}{3}n \\
 &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}n.
 \end{aligned}$$

De plus, $w_n = \frac{1}{v_n - 3}$ donc $v_n = \frac{1}{w_n} + 3$, ainsi :

$$v_n = \frac{-1}{1/2 + n/3} + 3.$$

5 Sens de variation d'une suite arithmétique

Méthode 3.4

Comment déterminer le sens de variation d'une suite est arithmétique ?

Proposition 3.2 (Sens de variation des suites arithmétiques) — Si (u_n) est arithmétique de raison r alors :

- si $r > 0$ alors (u_n) est strictement croissante ;
- si $r < 0$ alors (u_n) est strictement décroissante ;
- si $r = 0$ alors (u_n) est constante.

DÉMONSTRATION : Par définition d'une suite arithmétique, $u_{n+1} - u_n = r$ pour tout entier naturel n , et le résultat est immédiat.

☞ **Exemple 5** La suite de l'exemple 1 : $u_n = 5n + 2$, cette suite est strictement croissante car on a montré que $r = 5$.

☞ **Exemple 6** La suite de l'exemple 2 est strictement décroissante car on a montré que $r = -\frac{1}{3}$.

6 Somme des termes d'une suite arithmétique

Méthode 3.5

Comment calculer la somme des termes d'une suite est arithmétique ?

Proposition 3.3 (Somme des termes d'une suite arithmétique) — Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

Alors pour tous entiers n et p tels que $p \leq n$:

$$\sum_{k=p}^n u_k = u_p + \dots + u_n = (n - p + 1) \frac{u_p + u_n}{2}.$$

En particulier, si $p = 0$:

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n + 1) \frac{u_0 + u_n}{2}.$$

Lemme 3.3-1 (Somme de Gauss) — On a :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Remarque 2 La légende raconte que Gauss, alors qu'il était à l'école primaire, a été puni par son instituteur, qui lui a donné comme travail pendant la récréation de calculer $1 + 2 + \dots + 100$. Quelques instants plus tard, l'instituteur voit Gauss en train de jouer avec ses camarades et le reprend : mais il avait déjà terminé l'exercice.

DÉMONSTRATION (du lemme) : Écrire la somme dans les deux sens, puis ajouter terme à terme. Que constate-t-on ?

DÉMONSTRATION (de la proposition) : À l'aide du lemme, on peut maintenant démontrer la proposition :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n u_k &= \sum_{k=0}^n u_0 + u_0 + r + \dots + u_0 + nr \\
 &= (n+1)u_0 + r + 2r + \dots + nr \\
 &= (n+1)u_0 + (1+2+\dots+n)r \\
 &= (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}r \\
 &= (n+1) \frac{u_0 + u_0 + nr}{2} \\
 &= (n+1) \frac{u_0 + u_0 + nr}{2} \\
 &= (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}
 \end{aligned}$$

Remarque 3 Pour retenir ces formules, on se souviendra que la somme est égale au nombre de terme multiplié par la moyenne (arithmétique !) des termes extrêmes.

☞ **Exemple 7** Avec la suite donnée par $u_n = 5n + 2$, on peut calculer par exemple :

$$\begin{aligned}
 u_0 + u_1 + \dots + u_{12} &= 13 \times \frac{u_0 + u_{12}}{2} \\
 &= 13 \times \frac{2 + 62}{2} \\
 &= 416
 \end{aligned}$$