Fiche 4 | Suites géométriques

1 Définition

Définition 1 (Suite géométrique) — On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel q tel que pour tout entier n :

$$u_{n+1} = qu_n.$$

2 Montrer qu'une suite est géométrique

Méthode 4.1

Comment montrer qu'une suite est géométrique ?

On peut exprimer u_{n+1} sous la forme qu_n où q est un réel qui ne dépend pas de n . Dans ce cas, q est appelé la **raison** la suite géométrique.

Exemple 1 Montrer que la suite définie par $u_n = 3 \times (-4)^n$ est géométrique.

Correction exemple 1 : Écrivons pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3 \times (-4)^{n+1} \\ &= 3 \times (-4)^n \times (-4) \\ &= -4 \times u_n. \end{aligned}$$

(u_n) est donc géométrique de raison -4 .

3 Montrer qu'une suite n'est pas géométrique

Méthode 4.2

Comment montrer qu'une suite n'est pas géométrique ?

Si la suite ne s'annule pas, il faut trouver un entier naturel k tel que $\frac{u_{k+2}}{u_{k+1}} \neq \frac{u_{k+1}}{u_k}$.

Si la suite s'annule : c'est facile... Soit elle est nulle en tout terme sauf peut-être le premier (et dans ce cas, elle est géométrique), soit elle n'est pas géométrique.

Exemple 2 Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 9 \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que (u_n) n'est pas géométrique.

Correction exemple 2 : Calculons : $u_0 = 2$, $u_1 = 17$ et $u_2 = 77$. Donc :

- $u_2/u_1 = 77/17$;
- $u_1/u_0 = 17/2$.

Le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'étant pas constant, la suite (u_n) n'est pas géométrique.

Remarque 1 Même si dans le dernier exemple, la suite (u_n) n'est pas géométrique, on peut quand même se ramener à l'étude d'une suite géométrique (ce n'est pas toujours le cas, mais là c'est possible).

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = u_n + 3$ et montrons que (v_n) est géométrique :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 3 \\ &= 4u_n + 9 + 3 \\ &= 4u_n + 12 \\ &= 4(u_n + 3) \\ &= 4v_n \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est géométrique de raison 4.

4 Expression explicite d'une suite géométrique

Méthode 4.3

Comment déterminer une expression explicite d'une suite géométrique ?

Proposition 4.1 (Expression explicite des suites géométriques) — Il y a équivalence entre les énoncés suivants :

- (u_n) est une suite géométrique de raison q ;
- pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 \times q^n,$$

et de manière plus générale, pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$:

$$u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

DÉMONSTRATION : Une petite récurrence.

Exemple 3 Avec l'énoncé précédent, on a donc pour tout entier naturel n :

$$v_n = v_0 \times 4^n.$$

Or $v_0 = u_0 + 3 = 5$ donc :

$$v_n = 5 \times 4^n.$$

Remarque 2 On peut déduire ainsi l'expression explicite de (u_n) de l'exemple précédent :

$$u_n = v_n - 3 = 5 \times 4^n - 3.$$

Vous ferez bien une partie partie d'un sujet de bac pour appliquer tout ce que l'on vient de voir ?

Exemple 4 (Amérique du Sud, 2019) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n + 4} \\ u_0 = 5 \end{cases}$$

Partie B

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}.$$

- 1) a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0 .
- b) Exprimer v_n en fonction de n .
En déduire que pour tout entier naturel n , $v_n \neq 1$.

Correction exemple 4 :

1) a) Pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} \\ &= \frac{3 - \frac{10}{u_n + 4} - 1}{3 - \frac{10}{u_n + 4} + 2} \\ &= \frac{2 - \frac{10}{u_n + 4}}{5 - \frac{10}{u_n + 4}} \\ &= \frac{\frac{2u_n + 8 - 10}{u_n + 4}}{\frac{5u_n + 20 - 10}{u_n + 4}} \\ &= \frac{2u_n - 2}{5u_n + 10} \\ &= \frac{2(u_n - 1)}{5(u_n + 2)} \\ &= \frac{2}{5} \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \\ &= \frac{2}{5} v_n. \end{aligned}$$

L'égalité $v_{n+1} = \frac{2}{5} v_n$, vraie pour tout naturel n , démontre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0,4$ et de premier terme $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \frac{4}{7}$.

- b) On déduit de la question précédente que pour tout naturel n , $v_n = v_0 \times 0,4^n = \frac{4}{7} \times 0,4^n$.
Comme $\frac{4}{7} < 1$ et $0,4 < 1$ et par conséquent $0,4^n < 1$, on peut en déduire que $v_n < 1$, donc en particulier $v_n \neq 1$.

5 Variations des suites géométriques

C'est plus délicat que pour les suites arithmétiques !

Proposition 4.2 (Variations d'une suite géométrique)

— Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$. Alors :

- si $q = 0$ alors (u_n) est constante à partir du rang 1;
- si $q = 1$ alors (u_n) est constante;
- si $q > 1$ alors (u_n) est strictement croissante si $u_0 > 0$, strictement décroissante si $u_0 < 0$;
- si $0 < q < 1$ alors (u_n) est strictement décroissante si $u_0 > 0$, strictement croissante si $u_0 < 0$;
- si $q < 0$ alors (u_n) n'est pas monotone.

6 Somme des termes d'une suite géométrique

Méthode 4.4

Comment déterminer la somme des termes d'une suite géométrique ?

On utilise le petit lemme suivant :

Lemme 4.2-1 — Pour tout entier naturel n et tout réel $q \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

DÉMONSTRATION : Développer $(1 + q + q^2 + \dots + q^n)(1 - q)$.

Remarque 3 L'exposant de q au numérateur à droite est toujours le nombre de termes de la somme. Pratique pour éviter de se tromper.

Puis la formule plus générale :

Proposition 4.3 — Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 .

Alors pour tous entiers n et p tels que $p \leq n$:

$$\sum_{k=p}^n u_k = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$$

En particulier, si $p = 0$:

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

DÉMONSTRATION : Écrire :

$$\begin{aligned} u_p + u_{p+1} + \dots + u_n &= u_p + \underbrace{u_p \times q}_{=u_{p+1}} + \dots + \underbrace{u_p \times q^{n-p}}_{=u_n} \\ &= u_p (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-p}) \end{aligned}$$

Puis appliquer le lemme.

Exemple 5 Avec la suite (v_n) de l'exemple 3, on peut calculer :

$$\begin{aligned} v_0 + v_1 + \dots + v_9 &= v_0 \times \frac{1 - 5^{10}}{1 - 5} \\ &= 5 \frac{1 - 9765625}{-4} \\ &= 12\,207\,030 \end{aligned}$$