Fiche 5 | # Variations des suites

1 Définition

Lorsqu'on est face à une suite qui n'est ni arithmétique, ni géométrique, il faut connaître quelques méthodes pour étudier ses variations.

Définition 1 (Variation d'une suite) — On dit qu'une suite (u_n) est **croissante** (resp. **strictement croissante**) si pour tout entier naturel n où u_n est défini :

$$u_n \leqslant u_{n+1} \quad (\text{resp. } u_n < u_{n+1}).$$

On dit que la suite (u_n) est **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) si pour tout entier naturel n où u_n est défini :

$$u_n \geqslant u_{n+1} \quad (\text{resp. } u_n > u_{n+1}).$$

Méthode 5.1

Comment déterminer le sens de variation d'une suite ?

2 En étudiant $u_{n+1} - u_n$

Une première façon de faire est d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$:

☞ **Exemple 1** Déterminer le sens de variations de la suite (u_n) est définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + n + 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

☞ **Correction exemple 1 :** Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = n + 2 \geqslant 0$$

car $n \geqslant 0$, donc la suite (u_n) est croissante.

☞ **Exemple 2** Déterminer le sens de variations de la suite (u_n) est définie par $u_n = 3n - 4^n$.

☞ **Correction exemple 2 :** Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3(n+1) - 4^{n+1} - 3n + 4^n \\ &= 3 + 4^n(1-4) \\ &= 3(1-4^n) \end{aligned}$$

Or pour tout entier naturel n, $4^n \geqslant 1$ donc ici $1 - 4^n \leqslant 0$ et $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ donc (u_n) est décroissante.

3 En étudiant $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

Une autre façon de faire, **utilisable dans le cas où** $u_n > 0$, est de comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 :

☞ **Exemple 3** Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = \dfrac{n!}{2^n}$.

☞ **Correction exemple 3 :** Pour tout entier naturel n non nul, $u_n > 0$ et :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n!} \\ &= \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

or pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{n+1}{2} \geqslant 1$ donc ici $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, ainsi (u_n) est croissante.

Remarque 1 Dans le dernier exemple, le fait que $n > 0$ est important ! Si la suite est définie à partir de $n = 0$ alors elle n'est ni croissante ni décroissante car $u_0 = 1$ et $u_1 = 1/2 < u_1$...