Chapitre 2 | Généralités sur les fonctions

[...] Tu sais, mon cher Auguste, que ces sujets ne sont pas les seuls que j'aie explorés. Mes principales méditations depuis quelques temps étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté. Il s'agissait de voir a priori dans une relation entre des quantités ou fonctions transcendantes quels échanges on pouvait faire, quelles quantités on pouvait substituer aux quantités données sans que la relation pût cesser d'avoir lieu. Cela fait reconnaître tout de suite l'impossibilité de beaucoup d'expressions que l'on pourrait chercher. Mais je n'ai pas le temps et mes idées ne sont pas encore bien développées sur ce terrain qui est immense. Tu feras imprimer cette lettre dans la revue Encyclopédique.

Je me suis souvent hasardé dans ma vie à avancer des propositions dont je n'étais pas sûr. Mais tout ce que j'ai écrit là est depuis bientôt un an dans ma tête, et il est trop de mon intérêt de ne pas me tromper pour qu'on me soupçonne d'avoir énoncé des théorèmes dont je n'aurais pas la démonstration complète.

Tu prieras publiquement Jacobi ou Gauss de donner leur avis non sur la vérité, mais sur l'importance des théorèmes. Après cela il se trouvera, j'espère, des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer tout ce gâchis.

Lettre testament d'Évariste Galois, 29 mai 1832.

I Notion de fonction et définitions

2.1.1 Fonction, image

Définition 1 (Fonction) — Soit E une partie de $\mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ étant l'ensemble des nombres réels).

- Une **fonction** est un procédé qui, à chaque nombre x de E, associe un et un seul nombre.
- E est appelé l'**ensemble** (ou le **domaine**) **de définition** de la fonction.
- On choisit comment noter la fonction : si par exemple on la note f, le nombre associé à x est noté $f(x)$.
- $f(x)$ est appelé l'**image de x par f**.

Remarque 1 Le nombre $f(x)$ se lit « f de x ».

Remarque 2 $f(x)$ n'a rien à voir avec une multiplication : f n'est pas un nombre.

☞ **Exemple 1** On considère un carré de côté x.

- Le périmètre du carré est une fonction qui dépend de x : $\mathcal{P}(x) = 4x$. *Son domaine de définition est l'ensemble des nombres positifs, car une longueur est un nombre positif.*
- L'aire du carré est une fonction qui dépend de x : $\mathcal{A}(x) = x^2$. *Son domaine de définition est aussi l'ensemble des nombres positifs.*
-
-
-

2.1.2 Formule

Définition 2 (Fonction définie par une formule) — Souvent, une fonction est définie par une formule qui indique quel calcul il faut faire avec le nombre de départ x. On note alors :

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

où $f(x)$ est le calcul à faire (dépendant a priori de x) pour avoir l'image de x par f.
Lorsque l'ensemble de définition de f est déjà précisé, on note parfois plus simplement $f : x \mapsto f(x)$.

☞ **Exemple 2** On a par exemple : $\begin{array}{rccc} \mathcal{P}: & [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & 4x. \end{array}$

☞ **Exemple 3** Si on considère la fonction : $\begin{array}{rccc} f: & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & 2x-3, \end{array}$

alors l'image de 4 par f est $f(4)$, qu'on calcule comme suit :

On dit donc que l'image de 4 par f vaut 5, ou encore $f(4) = 5$, ou encore que 4 est un **antécédent** de 5 par f.

2.1.3 Antécédent

Définition 3 (Antécédents) — Soit f une fonction définie sur un ensemble E.
Si y est un réel alors tout nombre x tel que $f(x) = y$ est appelé un **antécédent de y par f**.

☞ **Exemple 4**

•

•

•

Remarque 3 Un nombre x appartenant au domaine de définition d'une fonction f admet forcément une image par f, mais un nombre y peut admettre plusieurs antécédents par f.

II Représentations graphiques

2.2.1 Coordonnées dans le plan

Pour commencer, un bref rappel sur les coordonnées de point dans un repère.

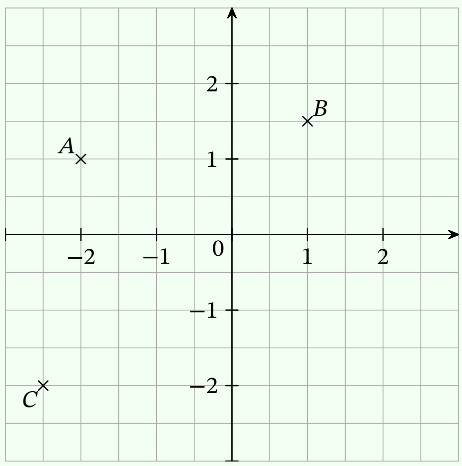
Définition 4 (Coordonnées des points dans le plan) — Si le plan est muni d'un repère, tout point M du plan est repéré par deux coordonnées, souvent notées x_M et y_M :

- x_M est appelée l'**abscisse** du point M ;
- y_M est appelée l'**ordonnée** du point M.

On note $M(x_M; y_M)$, **l'abscisse est toujours notée en premier**.

☞ **Exemple 5 (Coordonnées des points dans le plan)**

Donner par lecture graphique les coordonnées des points A, B et C :



2.2.2 Courbe d'une fonction

Souvent, il peut être plus pratique de représenter la courbe d'une fonction : cela permet de visuellement obtenir des informations qu'il serait difficile de conjecturer autrement.

Remarque 4 **Conjecturer** signifie émettre une idée mais sans démontrer qu'elle est vraie.

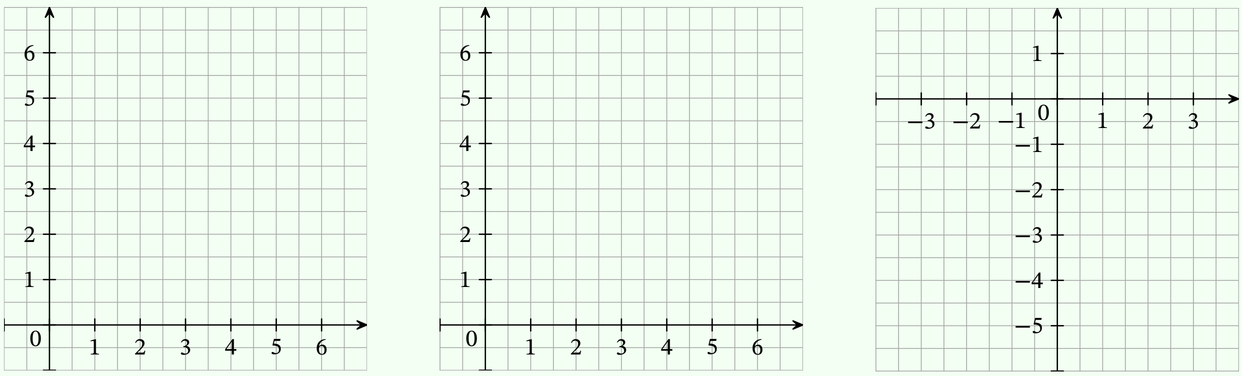
Définition 5 (Courbe représentative d'une fonction) — La **courbe représentative** d'une fonction est un ensemble de points (souvent noté $\mathcal{C}_f$) d'abscisses x et d'ordonnées y, tels que :

- x décrit l'ensemble de définition de f ;
- $y = f(x)$.

On dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$.

☞ **Exemple 6** Placer des points des courbes des fonctions $\mathcal{P}$, $\mathcal{A}$ et f définies précédemment, et les relier pour avoir une idée de la courbe de ces fonctions :

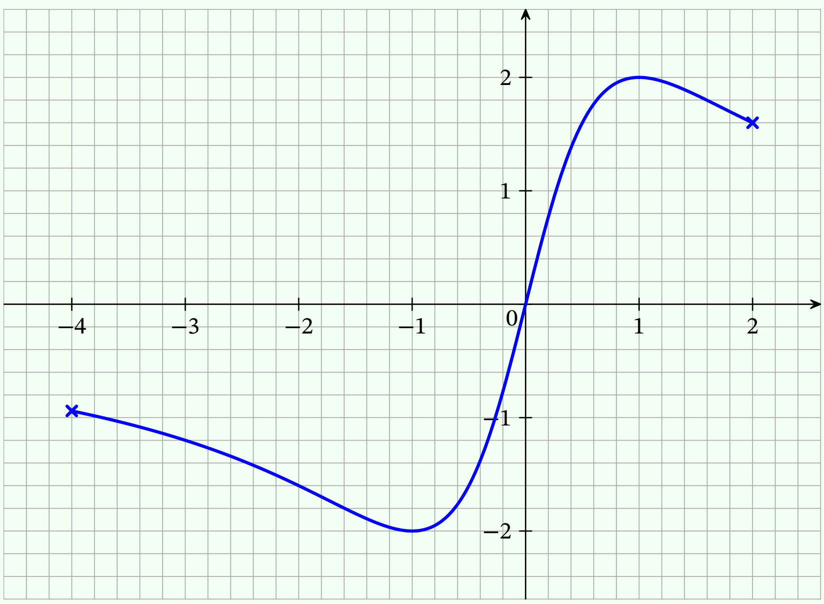
$\mathcal{P}(x) = 4x$ $\mathcal{A}(x) = x^2$ $f(x) = 2x - 3$



2.2.3 Lecture graphique d'images

☞ **Exemple 7** Si on a la courbe d'une fonction, on peut lire graphiquement certaines images. Considérons par exemple la fonction f dont la courbe est donnée ci-dessous. Alors :

- $f(-2) \approx$
- $f(-1) \approx$
- $f(0{,}4) \approx$



2.2.4 Calcul d'images

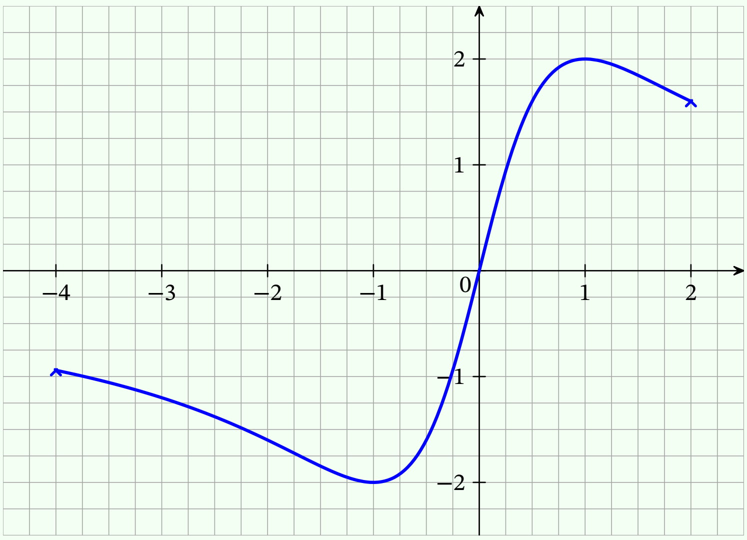
☞ **Exemple 8 (Calculer l'image d'un réel par une fonction)**
La fonction précédente a pour expression $f(x) = \dfrac{4x}{1+x^2}$. À l'aide de cette expression, calculer :

- $f(-2) =$
- $f(0) =$
- $f(-1) =$
- $f(0{,}4) =$

2.2.5 Déterminer le(s) antécédent(s) graphiquement

☞ **Exemple 9 (Antécédents et lecture graphique)** Déterminer le(s) antécédent(s) de $-1{,}5$ par f, s'ils existent, revient à savoir s'il existe des réels x tels que $f(x) = -1{,}5$. **Cela revient à résoudre une équation**. Mais parfois comme ici, on ne sait pas forcément résoudre simplement l'équation avec des manipulations algébriques. On peut par contre conjecturer graphiquement si $-1{,}5$ admet des antécédents, combien, et avoir une valeur approchée de leurs valeurs.

- On trace la droite des points qui ont $-1{,}5$ comme ordonnée : c'est une droite horizontale.
- On regarde si cette droite coupe la courbe de la fonction qui nous intéresse.
- On regarde enfin les abscisses des points d'intersection obtenus ce sont les antécédents que nous cherchons. Ici, on peut conjecturer qu'il y en a deux et qu'ils valent environ $-2{,}25$ et $-0{,}5$.



III Variations de fonctions

2.3.1 Quantificateurs

Dans toute la section, I est un intervalle sur lequel une fonction f est définie.

Définition 6 (Quantificateurs, H-P) — En mathématiques, pour écrire plus simplement certaines propositions, on utilise parfois des quantificateurs :

- $\forall$ signifie «pour tout » ;
- $\exists$ signifie «il existe » ;
- $\exists!$ signifie «il existe un unique».

On utilise aussi le symbole $\Rightarrow$ qui signifie «implique que ».

Définition 7 (Fonction croissante sur un intervalle) — On dit que f est **croissante sur** I si :

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b).$$

Remarque 5 (a,b) est un **couple** de réels, c'est pour cela qu'on note $(a,b) \in I^2$.

Définition 8 (Fonction décroissante sur un intervalle) — On dit que f est **décroissante sur** I si :

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad a \leqslant b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b).$$

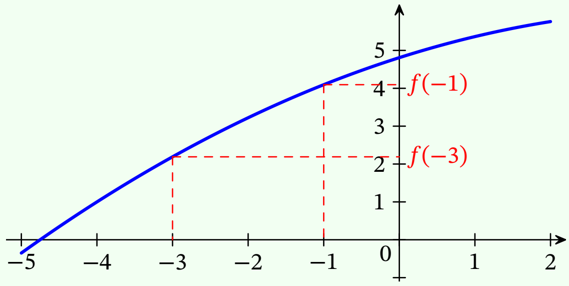
Définition 9 (Fonction monotone) — Si une fonction conserve le même sens de variation sur un intervalle, on dit qu'elle est **monotone** sur cet intervalle. Si on dit qu'une fonction f est monotone sans préciser l'intervalle, cela sous-entend qu'elle est monotone sur tout son intervalle de définition.

2.3.2 Graphiquement

☞ **Exemple 10 (Fonction croissante)**

La fonction dont la courbe est tracée ci-contre en bleu est **croissante** sur **R**, on a par exemple :

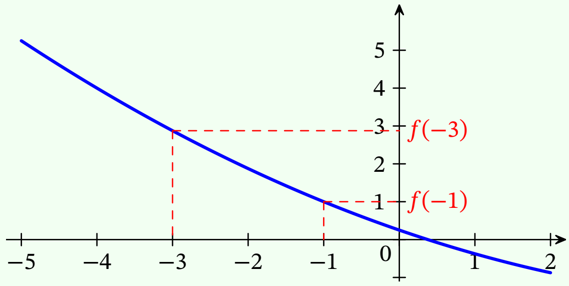
-
-



☞ **Exemple 11 (Fonction décroissante)**

La fonction dont la courbe est tracée ci-contre en bleu est **décroissante** sur **R**, on a par exemple :

-
-



2.3.3 Variations strictes

On peut avoir besoin d'être un peu plus précis, car on sait bien que $-3 \neq -1$. La définition de stricte croissance ou stricte décroissance permet de préciser que la fonction ne prend jamais deux fois la même valeur.

Définition 10 (Stricte croissance, stricte décroissance) — On dit que f est **strictement croissante sur** I si :

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad a < b \Rightarrow f(a) < f(b).$$

On dit que f est **strictement décroissante sur** I si :

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad a < b \Rightarrow f(a) > f(b).$$

2.3.4 Fonctions non monotones

Pour l'instant, on se contentera de lire graphiquement si une fonction est croissante ou décroissante, et d'utiliser la définition pour des cas particuliers, comme sur l'exemple ci-dessous.

☞ **Exemple 12 (Fonction non monotone)**

La fonction f dont la courbe est en bleu ci-contre est décroissante sur $]-\infty;-1]$ donc :

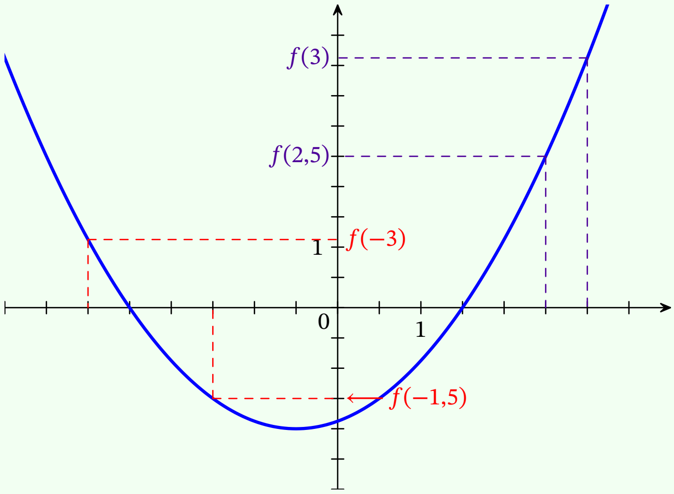
•

•

La fonction f dont la courbe est en bleu ci-contre est croissante sur $[-1;+\infty[$ donc :

•

•



IV Tableaux associés

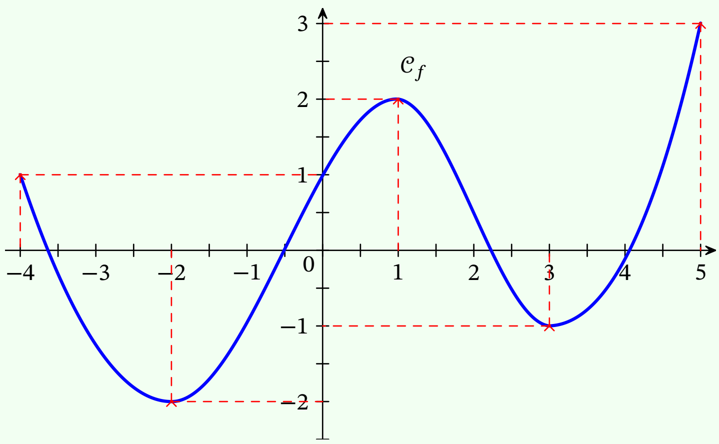
2.4.1 Tableau de variations

On peut plus simplement indiquer avec des flèches dans un **tableau de variations**, les variations d'une fonction.

☞ **Exemple 13 (Tableau de variations)**
Les variations de la fonction de l'exemple précédent sont :

x	
Variations de f	

☞ **Exemple 14** Voici un autre exemple, en considérant une fonction f et sa courbe représentative ci-dessous :



Son tableau de variations est :

x	
Variations de f	

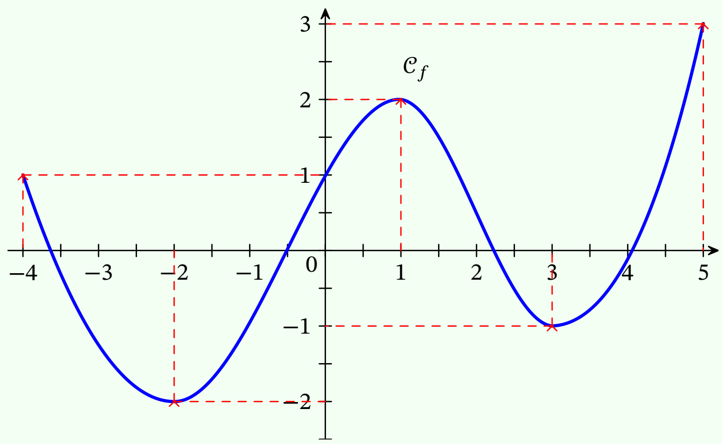
2.4.2 Extrema

Définition 11 (Extrema) — Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 appartenant à I. On dit que :

- f admet un **maximum** en x_0 si $\forall x \in I, \quad f(x) \leqslant f(x_0)$
- f admet un **minimum** en x_0 si $\forall x \in I, \quad f(x) \geqslant f(x_0)$

Un minimum ou maximum de f est appelé un **extremum** de f. Extrema est le pluriel d'extremum.

☞ **Exemple 15 (Extrema)** Donner les extrema de la fonction dont la courbe est représentée ci-dessous en bleu :

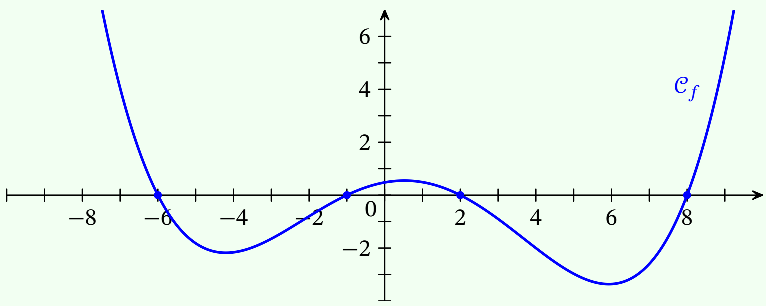


2.4.3 Tableau de signe

On peut indiquer le signe que prend $f(x)$ en fonction de x dans un tableau de signe. Visuellement :

- $f(x)$ est **supérieur** à zéro si la courbe de f est **au-dessus** de l'axe des abscisses ;
- $f(x)$ est **inférieur** à zéro si la courbe de f est **en-dessous** de l'axe des abscisses ;

☞ **Exemple 16 (Tableau de signe)**



x	
Signe de $f(x)$	

V Exercices

Fonctions

♦ **GFN.1** On considère la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & 2+x+x^2. \end{array}$$

1) Quel est le domaine de définition de f ?

2) Quelle est l'image de 3 par f ?

3) Quelle est l'image de -1 par f ?

♦ **GFN.2** On considère la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccl} f: &]-4,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x+4}. \end{array}$$

1) Quel est le domaine de définition de f ?

2) Quelle est l'image de 2 par f ?

3) Quelle est l'image de 1/4 par f ?

Fonction et graphique

♦ **GFN.3** On considère les courbes des figures 1 à 4. Quelles sont celles qui peuvent être des représentations graphiques de fonctions ?

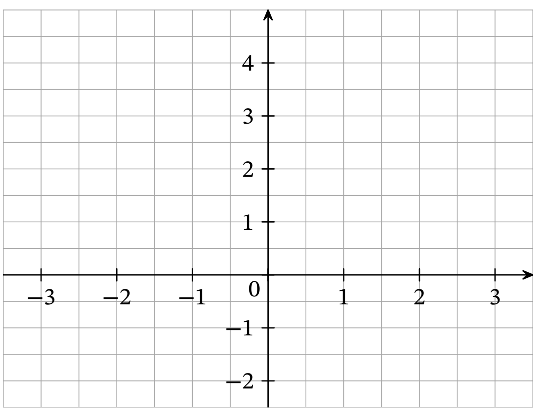
♦ **GFN.4** Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions représentées dans les figures 5, 6, 7, 9, 10 et 11.

♦ **GFN.5** On considère la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & x^2-x-\dfrac{7}{4}. \end{array}$$

1) Quel est le domaine de définition de f ?

2) Placer le plus de points possible de la courbe de f dans le graphique ci-dessous :



3) Quelles sont les coordonnées du point d'intersection de la courbe de f avec l'axe des ordonnées ?

4) Graphiquement, combien de solutions l'équation $f(x)=0$ semble-t-elle avoir ?

5) Graphiquement, combien de solutions l'équation $f(x)=-5$ semble-t-elle avoir ?

6) Le point $A\left(-\frac{1}{2};-1\right)$ appartient-il à la courbe de f ? (répondre en justifiant la réponse par un calcul !)

Lectures d'images

♦ **GFN.6** On considère la fonction f donnée par la courbe de la figure 7.

Lire les images par f des réels -1, -3, 1 et 4.

♦ **GFN.7** Les fonctions f et g sont données par les courbes de la figure 8.

1) Lire l'image de 0 par f. L'image de 0 par g existe-t-elle ?

2) Lire $f(4)$, $f(-2)$, $f(1)$, $f(-1)$.

3) Lire g(2), g(4).

Graphique et antécédents

♦ **GFN.8** On considère la fonction f donnée par la courbe de la figure 10.

1) Lire les images par f des réels -8, -5, -1, 0, 3 et 5.

2) Déterminer graphiquement les antécédents éventuels de 3 par f.

3) Déterminer les antécédents par f de 2, de 0, de -2, de 4, de 5.

♦ **GFN.9** On considère la fonction f donnée par la courbe de la figure 11.

1) Déterminer $f(1)$, $f(2{,}5)$, $f(4{,}5)$.

2) Déterminer graphiquement les antécédents éventuels de 1 par f.

3) Déterminer le nombre d'antécédents par f de 0,5, de -2, de -3, de 1,5, de 2.

♦ **GFN.10** (★) On considère la fonction f donnée par la courbe de la figure 13.

Soit m un réel. Déterminer, selon les valeurs de m, le nombre d'antécédents de m par f.

Tableaux de variation

♦ **GFN.11** Dresser le tableau de variation de toutes les fonctions de l'annexe à partir de la figure 7.

♦ **GFN.12** On donne le tableau de variations d'une fonction f définie sur $[-10;10]$:

x	-10		-7		0		6		10
Variations de f	0	↗	2	↘	-5	↗	5	↘	3

1) Compléter par $\leqslant$, $\geqslant$ ou ? si on ne peut pas savoir :

a) $f(1)\dots\dots\dots f(3)$ **b)** $f(-9)\dots\dots\dots f(-6)$

c) $f(7)\dots\dots\dots f(-2)$ **d)** $f(-6)\dots\dots\dots 2$

e) $f(-5)\dots\dots\dots f(-3)$ **f)** $f(1)\dots\dots\dots 0$

2) Compléter les phrases suivantes :

a) Si $-10 \leqslant a < b \leqslant -7$ alors

$$\dots\dots\dots f(a)\dots\dots\dots\dots f(b)\dots\dots\dots$$

b) Si $6 \leqslant a < b \leqslant 10$ alors

$$\dots\dots\dots f(a)\dots\dots\dots\dots f(b)\dots\dots\dots$$

♦ **GFN.13** La fonction f admet le tableau de variation ci-dessous :

x	-8		2		5		10
Variations de f	-6	↗	3	↘	-4	↗	-1

1) Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

2) Déterminer les extremums de la fonction f.

3) Déterminer l'image de 2 par f.

4) Donner un encadrement de $f(3)$.

5) Déterminer le nombre d'antécédents -2 par f.

6) Comparer $f(6)$ et $f(7)$. Justifier la réponse.

7) On donne $f(0) = f(3) = 2$ et les antécédents de -3 par f sont -5, 4 et 8.
Proposer une représentation graphique possible de f correspondant à ces données et au tableau de variation de cette fonction dans un repère orthonormé.

♦ **GFN.14** On donne le tableau de variation de la fonction f ci-dessous :

x	-10		-2		5		10
Variations de f	-5	↗	7	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-3

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2) f admet-elle un extremum sur D_f ? sur $[-10;5[$?

3) Donner un encadrement de $f(4)$.

4) D'après le tableau de variation, déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?

5) Même question pour l'équation $f(x) = 10$?

6) Même question pour l'équation $f(x) = -4$?

7) Comparer $f(-5)$ et $f(-3)$ en justifiant la réponse.

8) Proposer un tracé possible pour la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Tableaux de signes

♦ **GFN.15** Le tableau de signe de la fonction représentée figure 5 est le suivant :

x	-2		3		5		6
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	‖

Construire les tableaux de signe des fonctions représentées dans les figures 6, 7, 9, 10, 11, 13 et 14.

♦ **GFN.16** Dresser, dans chacun des cas suivants, le tableau de signes de l'expression $A(x)$.

1) $A(x)$ s'annule en 5 et -2 ; $A(x)$ est strictement positif pour x supérieur à 5 ou inférieur à -2 et $A(x) < 0$ sur $]-2;5[$.

2) $A(x) \geqslant 0$ pour $x \in [-3;4]$ et $A(x) \leqslant 0$ pour $x \in]-\infty;-3] \cup [4;+\infty[$.

3) $A(x)$ n'existe pas en -1 ; le réel 3 est l'unique solution de l'équation $A(x) = 0$ et $A(x) \geqslant 0$ sur $]-\infty;-1[\cup]-1;3]$ et $A(x) \leqslant 0$ pour $x \geqslant 3$.

♦ **GFN.17** Le tableau de signe d'une certaine fonction B est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
Signe de $B(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?

1) $B(4{,}5) < 0$; **2)** $B(1) = 0$;

3) $B(2) > B(4)$; **4)** $B(0) > 0$;

5) -2 et 3 sont les solutions de l'équation $B(x) = 0$;

6) Si $x < 0$ alors $B(x) < 0$;

7) L'ensemble des solutions de $B(x) \leqslant 0$ est $]-\infty;-2] \cup [3;+\infty[$;

8) Les nombres tels que $B(x) \geqslant 0$ sont les nombres vérifiant $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

♦ **GFN.18** (**Avec la calculatrice**) Au premier juin, un producteur peut récolter dans son champ 800 kg de courgettes et les vendre 1,40 euros le kilogramme. S'il retarde sa récolte, celle-ci augmente de 80 kg chaque jour, mais le prix de vente diminue de 0,04 euros par kilogramme et par jour. Les employés pour la récolte lui coûtent 1400 euros.

L'objectif de l'exercice est d'étudier le bénéfice possible du producteur et de commenter ce problème.

1) Le premier juin, quel serait le bénéfice du producteur ?

2) Le deux juin, quel serait son bénéfice ?

3) Soit x le jour du mois de juin considéré pour la vente et $f(x)$ le bénéfice associée à ce jour de vente.

a) Exprimer le nombre de kilogrammes de courgettes qu'il peut récolter le x juin.

b) Exprimer le prix de vente d'un kilogramme le x juin.

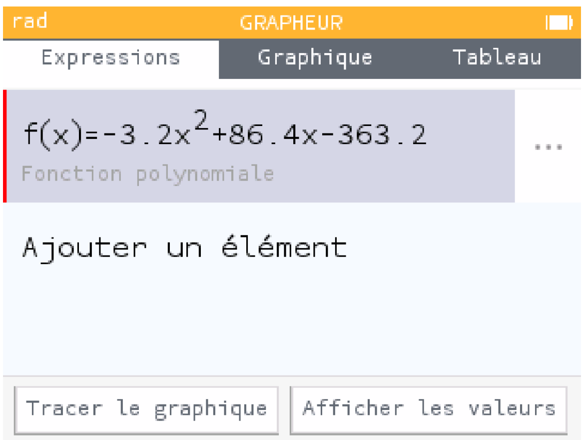
c) En déduire que pour tout entier naturel x compris entre 1 et 30 on a :

$$f(x) = (720 + 80x)(1{,}44 - 0{,}04x) - 1400.$$

d) Montrer que $f(x)$ peut se réécrire :

$$f(x) = -3{,}2x^2 + 86{,}4x - 363.2.$$

4) Aller dans la partie "Grapheur" de la calculatrice Numworks, puis choisir "Ajouter un élément" et enfin "$f(x) = x$". Rentrer ensuite l'expression de $f(x)$.



5) Choisir ensuite "Afficher les valeurs" pour obtenir les valeurs de $f(x)$ pour des valeurs entières de x.

6) Compléter le tableau ci-dessous, en arrondissant au centième :

x	1	2	5	10	15	25
$f(x)$						

7) Reporter les valeurs dans le graphique page 12 à la fin de la fiche d'exercices.

8) Que se passe-t-il si le producteur attend la fin du mois pour récolter les courgettes ?

9) Compléter à l'aide du graphique le tableau de variation de cette fonction :

x	1 30
Variations de f	

10) À l'aide du graphique, donner une estimation de la meilleure recette possible pour le producteur.

11) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geqslant 100$. À quoi cette inéquation correspond-elle pour le problème ?

12) Compléter graphiquement le tableau de signe de la fonction f :

x	1 30
Signe de $f(x)$	

Extrema

♦ **GFN.19** Déterminer, lorsque c'est possible, le minimum et le maximum ainsi que les valeurs pour lesquels ils sont atteints de toutes les fonctions représentées en annexe à partir de la figure 7.

Courbes pour les exercices

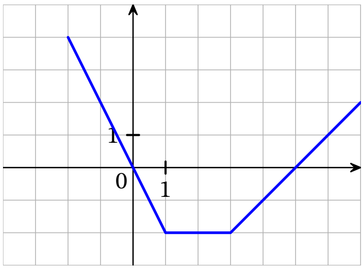


Figure 1

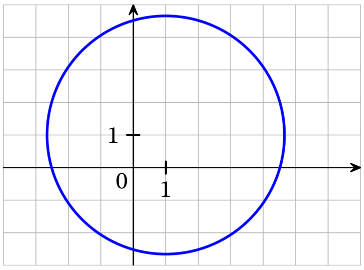


Figure 2

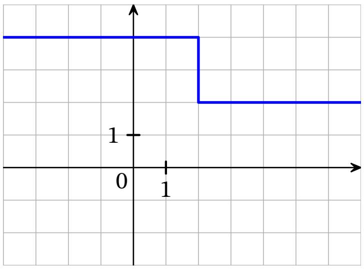


Figure 3

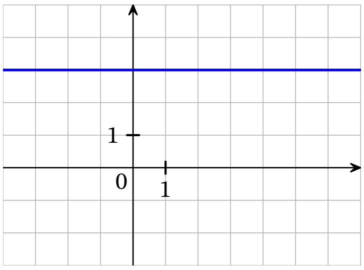


Figure 4

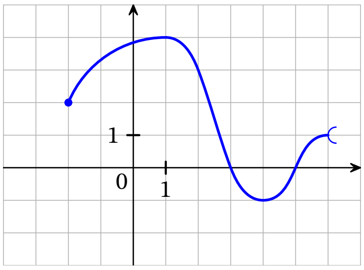


Figure 5

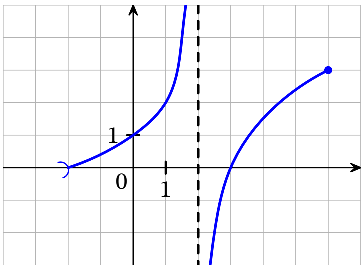


Figure 6

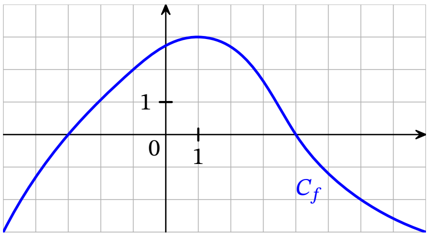


Figure 7

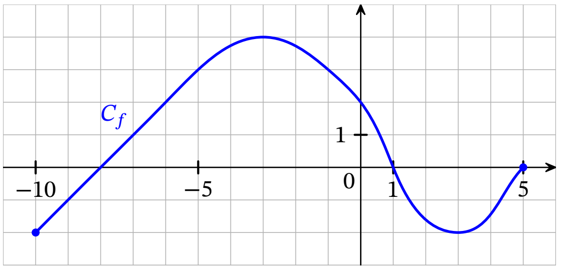


Figure 10

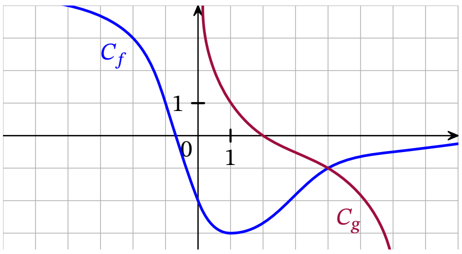


Figure 8

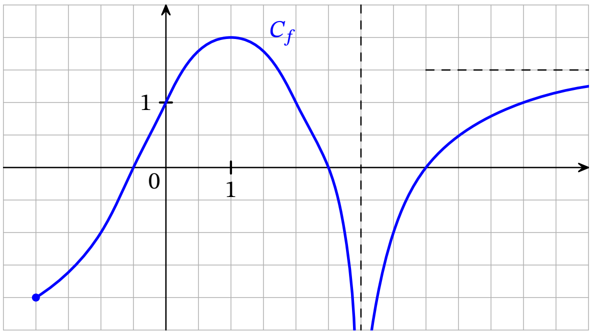


Figure 11

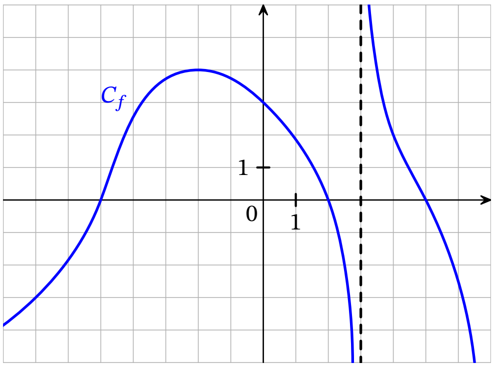


Figure 9

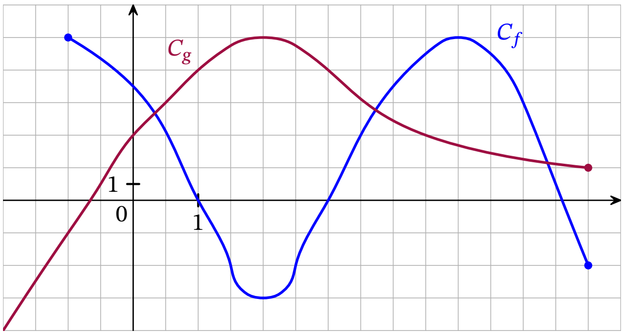


Figure 12

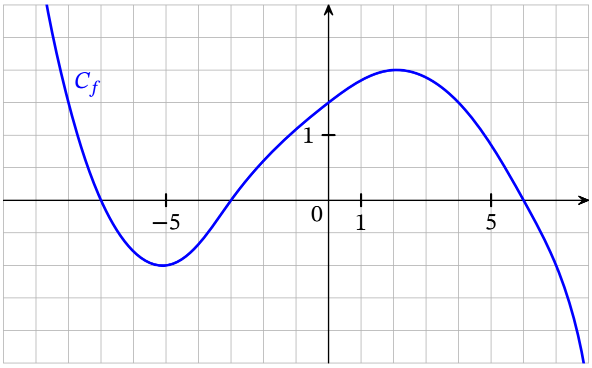


Figure 13

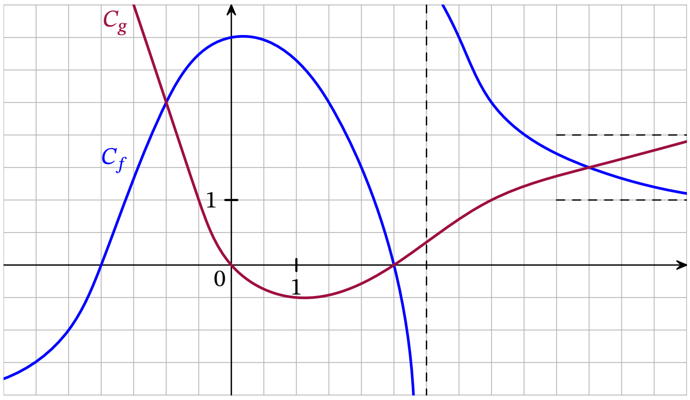


Figure 14

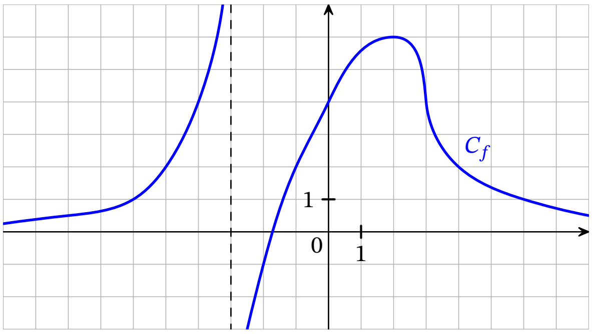
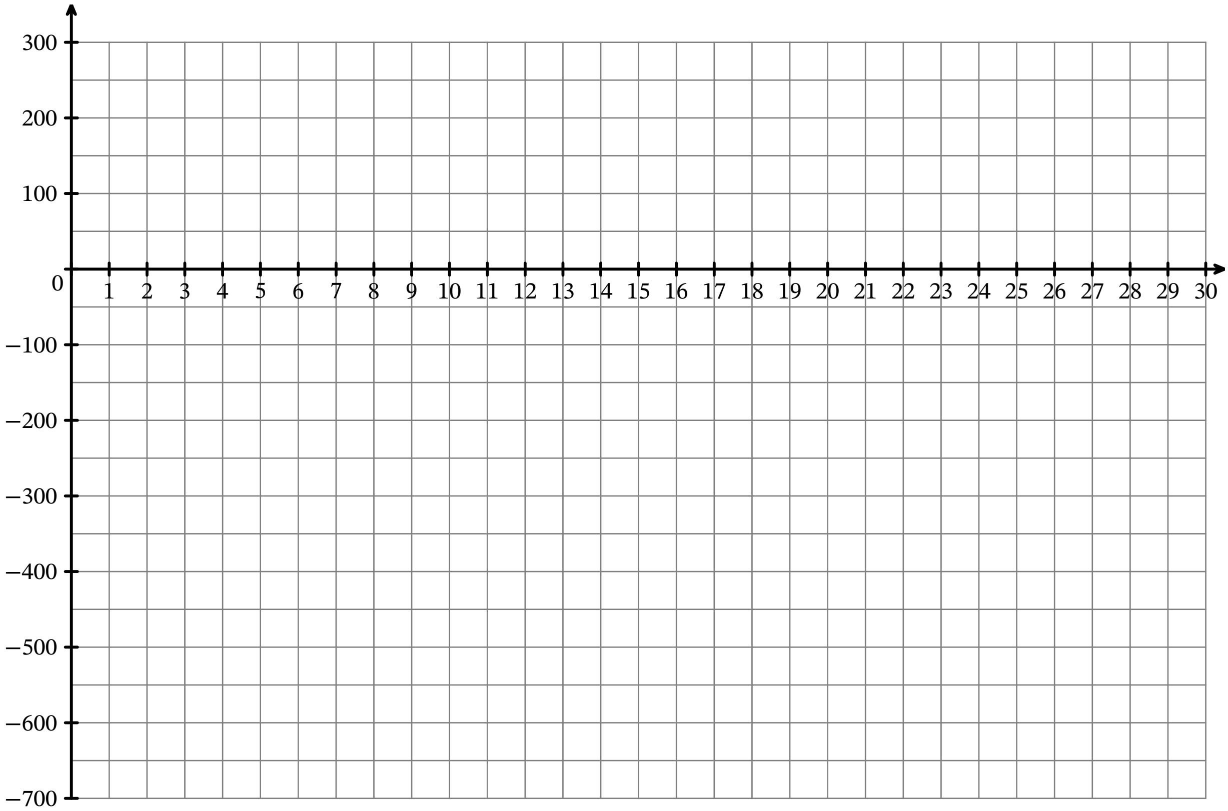


Figure 15



Graphique pour l'exercice 18.