Fiche 6 | Récurrence

Cette petite fiche servira à illustrer sur deux exemples, le raisonnement par récurrence et sa rédaction. Typiquement, un raisonnement par récurrence peut être utilisé lorsqu'on doit montrer une propriété vraie pour tout entier naturel.

On se base sur le cours :

Théorème 6.1 (Raisonnement par récurrence) — *Soit $P(n)$ une propriété dépendant de l'entier naturel n. On suppose qu'on a les deux assertions suivantes :*

- *$P(0)$ est vraie, (**initialisation**)*
- *pour tout $k \in \mathbf{N}$, $P(k)$ implique $P(k+1)$, (**hérédité**).*

Alors $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

☞ **Exemple 1 (Calculons la somme des entiers impairs)** Plus précisément, si $n \in \mathbf{N}$, montrons que :

$$1+3+\ldots+(2n+1)=(n+1)^2.$$

☞ **Correction exemple 1 :** Pour commencer, on pose pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$P(n) : \text{"}1+3+\ldots+(2n+1)=(n+1)^2\text{"}.$$

Initialisation : $(0+1)^2 = 1$ et $1 = 1$ (!) donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : supposons qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $P(k)$ soit vraie. Alors :

$$\begin{aligned}
1+3+\ldots+(2k+1) &= (k+1)^2 \\
1+3+\ldots+(2k+1)+(2(k+1)+1) &= (k+1)^2+(2(k+1)+1) \\
1+3+\ldots+(2k+3) &= (k+1)^2+(2k+3) \\
&= k^2+2k+1+2k+3 \\
&= k^2+4k+4 \\
&= (k+2)^2
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, la propriété $P(n)$ est donc héréditaire. Comme elle est vraie au rang $n=0$, on peut en conclure par récurrence qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Remarque 1 C'est souvent l'hérédité qui peut être délicate ; il faut se demander comment "passer" de $P(k)$ à $P(k+1)$. Ici, cela revient à passer de la somme jusqu'à $2k+1$ à la somme jusqu'à $2k+3$ (le terme suivant), donc partir de l'égalité $P(k)$ et y ajouter de chaque côté $2k+3$ est naturel.

☞ **Exemple 2 (Une inégalité classique)** On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0{,}7 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Montrons que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

☞ **Correction exemple 2 :** Pour commencer, on pose pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$P(n) : \text{"}0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1\text{"}.$$

Initialisation : $u_0 = 0{,}7$ et $u_1 = 0{,}875$, donc $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$, ainsi $P(0$ est vraie.

Hérédité : supposons qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $P(k)$ soit vraie. Alors :

$$0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 1.$$

On souhaite montrer que dans ce cas :

$$0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 1.$$

Comment faire ? Ici, le plus simple et de comprendre que pour passer de u_k à u_{k+1}, il faut utiliser la définition de (u_n) : $u_{k+1} = \dfrac{3u_k}{1+2u_k}$.

Si on pose $f(x) = \dfrac{3x}{1+2x}$, alors $u_{k+1} = f(u_k)$. Si on montre que f est croissante sur $[0{,}1]$, on aura gagné car on pourra appliquer f dans l'inégalité à chaque membre et conserver le sens des inégalités ! Pour montrer que f est croissante sur $[0{,}1]$, voir les méthodes pour déterminer le sens de variation de f. Reprenons :

$$0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 1.$$

Or f est croissante sur $[0{,}1]$ donc :

$$\underbrace{f(0)}_{=0} \leqslant \underbrace{f(u_k)}_{=u_{k+1}} \leqslant \underbrace{f(u_{k+1})}_{=u_{k+2}} \leqslant \underbrace{f(1)}_{=1}.$$

$$0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 1.$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, la propriété $P(n)$ est donc héréditaire. Comme elle est vraie au rang $n=0$, on peut en conclure par récurrence qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.