♦ **INT 1.1** Soit (u_n) la suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 2$.

1) Donner une expression explicite de (u_n).

2) Calculer $\sum_{k=0}^{50} u_k = u_0 + \dots + u_{30}$.

☞ **Correction exercice 1 :**

1) (u_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 2$ donc pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2 \times 3^n.$$

2) (u_n) étant géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 2$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{50} u_k &= u_0 + \dots + u_{50}\\ &= 2\frac{1-3^{51}}{1-3}\\ &= 3^{51} - 1.\end{aligned}$$

♦ **INT 1.2** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n + 2^{n+1}.$$

1) a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?

2) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant 0$.

3) On considère la suite (w_n) définie, pour tout $n \in \mathbf{N}$, par

$$w_n = \frac{u_n}{2^n}.$$

a) Montrer que (w_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'expression de w_n puis celle de u_n en fonction de n.

4) On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

a) Calculer S_0, S_1, S_2 et S_3.

b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$S_n = n2^{n+1} + 1.$$

☞ **Correction exercice 2 :**

1) a) $u_1 = 2u_0 + 2^1 = 4$, $u_2 = 2u_1 + 2^2 = 12$ et $u_3 = 2u_2 + 2^3 = 32$.

b) Comme $u_1 - u_0 = 3$ et $u_2 - u_1 = 8$, $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) n'est pas une suite arithmétique.
De même, comme $\frac{u_1}{u_0} = 4$ et $\frac{u_2}{u_1} = 3$, $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$, donc (u_n) n'est pas une suite géométrique.

2) a) Considérons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la proposition $P(n)$: « $u_n \geqslant 0$ ».
<u>Initialisation :</u> Par définition, $u_0 = 1 \geqslant 0$ donc $P(0)$ est vraie.
<u>Hérédité :</u> Soit $k \in \mathbf{N}$. Supposons que $P(k)$ est vraie. Alors $u_k \geqslant 0$ donc $2u_k \geqslant 0$ et ainsi $2u_k + 2^{k+1} \geqslant 2^{k+1} \geqslant 0$ donc $u_{k+1} \geqslant 0$.
Dès lors, $P(k+1)$ est vraie.
La proposition $P(n)$ étant initialisée au rang $n = 0$ et héréditaire, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$, donc $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \geqslant 0$.

3) a) Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors,

$$w_{n+1} - w_n = \frac{u_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{u_n}{2^n} = \frac{2u_n + 2^{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{2u_n}{2^{n+1}} + 1 = 1.$$

On en déduit que (w_n) est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $w_0 = \frac{u_0}{2^0} = 1$.

b) On en déduit que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $w_n = w_0 + n \times 1 = n + 1$ et donc $u_n = w_n \times 2^n$, c'est-à-dire $u_n = (n+1)2^n$.

4) a) $S_0 = u_0 = 1$, $S_1 = u_0 + u_1 = 1 + 4 = 5$, $S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = 5 + 12 = 17$ et $S_3 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 17 + 32 = 49$.

b) Considérons, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la proposition $Q(n)$: « $S_n = n2^{n+1} + 1$ ».
<u>Initialisation :</u> Comme $S_0 = 1$ et $0 \times 2^{0+1} + 1 = 1$, on a bien $Q(0)$.
<u>Hérédité :</u> Soit $k \in \mathbf{N}$. Supposons que $Q(k)$ est vraie. Alors $S_k = k2^{k+1} + 1$. Or, d'après la question 3.b., $u_{k+1} = (k+2)2^{k+1}$ donc

$$S_{k+1} = S_k + u_{k+1} = k2^{k+1} + 1 + (k+2)2^{k+1} = (2k+2)2^{k+1} + 1 = (k+1)2^{k+2} + 1.$$

Donc $Q(k+1)$ est vraie. La proposition $Q(n)$ étant initialisée au rang $n = 0$ et héréditaire, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$, donc $\forall n \in \mathbf{N}, \quad S_n = n2^{n+1} + 1$.