Fiche 1 | Axiomatique de N

Je présente dans cette fiche l'ensemble **N** à partir des axiomes de Peano. Globalement, tout est hors-programme en Terminale, mais qui ne s'est jamais demandé « au fait, c'est quoi un nombre ? »

Notons que dans cette vision de **N**, on ne présente pas comment est construit **N**. On peut, en théorie des ensemble, construire complètement **N** à partir d'axiomes sur les ensembles eux-mêmes, mais, là, on est vraiment au-delà de ce qui peut être présenté au lycée.

Axiomes de Peano, 1889 pour **N** (HP) :
Il existe un ensemble **N** dont les éléments sont appelés les entiers naturels, un élément $0 \in \mathbf{N}$ appelé zéro et une application $s : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, dite application successeur, vérifiant les propriétés suivantes :

- 0 n'est le successeur d'aucun entier ;
- deux nombres entiers qui ont le même successeur sont égaux ;
- si une partie A de **N** contient 0 et est stable par s alors $A = \mathbf{N}$ (Principe de récurrence).

On pose à partir de cela $1 = s(0), 2 = s(1), 3 = s(2)$, etc... Nous allons montrer, à partir des axiomes de Peano, les propriétés de **N**.

Proposition 1.1 — *Tout entier $a \neq 0$ est le successeur d'un entier.*

DÉMONSTRATION : C'est le principe de récurrence. On considère la partie

$$A = s(\mathbf{N}) \cup \{0\}.$$

On a $0 \in A$ et $A \subset \mathbf{N}$, donc $s(A) \subset s(\mathbf{N}) \subset A$. Par l'axiome 3) (principe de récurrence), A est égale à **N**.

Ainsi, si a est différent de 0, comme il est dans A, il est dans $s(\mathbf{N})$, donc il est le successeur d'un entier.

On construit ensuite $+$, que l'on connaît bien, mais il faut le définir !

Proposition 1.2 (Définition - proposition pour $+$) — *Soit $n \in \mathbf{N}$. Il existe une application $m \mapsto n+m$ de **N** dans **N** définie en posant :*

$$n + 0 = n,$$
$$n + s(p) = s(n+p) \quad \text{pour tout } p \in \mathbf{N}.$$

*Cette application définit une opération sur **N**, c'est-à-dire une application de $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ dans **N** qui au couple (n,p) associe $n+p$. Cette opération est appelée* addition *et l'entier $n+p$ est appelé* somme *de n et p.*

DÉMONSTRATION : Il faut vérifier que l'ensemble A des m pour lesquels l'application est définie est **N** tout entier. Comme A contient 0 et est stable par successeur, cela résulte du principe de récurrence.

Remarque 1 On a, par définition, $n+1 = n+s(0) = s(n+0) = s(n)$. L'application successeur est donc l'application qui consiste à ajouter 1.

Théorème 1.3 (Deuxième formulation du principe de récurrence) — *Soit $P(n)$ une propriété de l'entier $n \in \mathbf{N}$. On suppose que les deux assertions suivantes sont vérifiées :*

1) *$P(0)$ est vraie (initialisation),*
2) *pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P(n)$ implique $P(n+1)$ (hérédité).*

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

DÉMONSTRATION : Il suffit d'appliquer l'axiome 3) à l'ensemble A des n qui vérifient la propriété $P(n)$.

Proposition 1.4 (Propriétés de $+$, HP) — *On a les propriétés suivantes :*

1) *L'addition est associative : on a, pour tous a, b et $c \in \mathbf{N}$, $a+(b+c) = (a+b)+c$.*
2) *L'addition est commutative : on a, pour tous a, $b \in \mathbf{N}$, $a+b = b+a$.*
3) *On a, pour tous a, b et $c \in \mathbf{N}$, $a+b = a+c \Rightarrow b = c$ (règle de simplification).*
4) *Si $a+b$ est nul, a et b sont nuls.*

DÉMONSTRATION : Montrons 1). On fixe $a,b \in \mathbf{N}$ et on applique le principe de récurrence à c. Soit C l'ensemble des c qui vérifient la propriété. On a $0 \in C$. En effet, par définition, on a $a+(b+0) = a+b$ et $(a+b)+0 = a+b$. Supposons que c soit le successeur de p et que p vérifie la propriété. On a $a+(b+c) = a+(b+s(p)) = a+s(b+p) = s(a+(b+p))$ par définition de l'addition, et cette quantité est égale à $s((a+b)+p)$ puisque p est dans C. Par ailleurs, on a $(a+b)+c = (a+b)+s(p) = s((a+b)+p)$ par définition de l'addition. On voit qu'on a bien $c \in C$, de sorte que C est stable par successeur, donc égal à **N**, cqfd.

Pour le point 2), on commence par montrer deux lemmes.

Lemme 1.4-1 — *Pour tout $a \in \mathbf{N}$, $a+0 = 0+a = a$.*

DÉMONSTRATION : On raisonne par récurrence sur a.

Lemme 1.4-2 — *Pour tout $a,p \in \mathbf{N}$ on a $s(p)+a = s(p+a)$.*

DÉMONSTRATION : On raisonne par récurrence sur a. Précisément, on considère l'ensemble A des a qui vérifient, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $s(p)+a = s(p+a)$. Par définition de l'addition, 0 est dans A. Soit $q \in A$. On a donc, pour tout p, $s(p)+q = s(p+q)$. Montrons que $a = s(q)$ est aussi dans A. On calcule $s(p)+a = s(p)+s(q) = s(s(p)+q)$ (par définition de l'addition) et c'est encore $s(s(p+q))$ par l'hypothèse de récurrence. Par ailleurs, on a $s(p+a) = s(p+s(q)) = s(s(p+q))$, par définition encore : cqfd.

On peut alors prouver le point 2). On raisonne par récurrence sur b en appelant B l'ensemble des $b \in \mathbf{N}$ qui vérifient, pour tout $a \in \mathbf{N}$, $a+b = b+a$. On a $0 \in B$ par 1.8. Supposons $p \in B$ et montrons $s(p) \in B$. On calcule $a+s(p) = s(a+p) = s(p+a) = s(p)+a$ (successivement, par définition, hypothèse de récurrence et 1.9). On

a gagné.

Le point 3), après commutation, se montre par récurrence sur a.

Enfin, le point 4) est évident en raisonnant par l'absurde : si, par exemple, b n'est pas nul, c'est un successeur par 1.2, donc aussi $a+b$ par définition de l'addition et c'est absurde (axiome 1).

Remarque 2

1) On notera qu'on a, pour tout $a \in \mathbf{N}$, $s(a) = a+1 = 1+a$.
2) Le premier théorème de l'arithmétique c'est : deux et deux font quatre, c'est-à-dire $2+2=4$. En effet, on a $4 = s(3) = 3+1 = (2+1)+1 = 2+(1+1) = 2+2$ en vertu de l'associativité.

Proposition 1.5 (Définition - proposition pour $\times$) — *On définit une loi de multiplication sur* $\mathbf{N}$*, notée* $\times$ *(ou sans signe opératoire lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion), en posant :*

$$n \times 0 = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N},$$
$$n \times s(p) = (n \times p) + n.$$

Cette loi vérifie les propriétés suivantes :

1) *La multiplication est associative et commutative :*

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c \quad \text{et} \quad a \times b = b \times a.$$

2) *La multiplication est distributive par rapport à l'addition : pour tous* $a,b,c \in \mathbf{N}$*,*

$$a \times (b+c) = a \times b + a \times c, \quad (a+b) \times c = a \times c + b \times c.$$

3) *Pour tout* $n \in \mathbf{N}$*, on a* $n \times 1 = n$.
4) *Si* $a \times b = 0$*, alors* $a = 0$ *ou* $b = 0$.
5) *Si* $a \times b = a \times c$ *avec* $a \neq 0$*, alors* $b = c$.

DÉMONSTRATION : Essentiellement, de la récurrence.

On définit enfin un ordre $\leqslant$ sur $\mathbf{N}$:

Définition 1 — Soient $p,q \in \mathbf{N}$. On dit que q est supérieur ou égal à p, et on écrit $q \geqslant p$, s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $q = n+p$. On dit que q est strictement supérieur à p si $q \geqslant p$ et $q \neq p$, et on note $q > p$.

Proposition 1.6 (admis) — *La relation* $\geqslant$ *est une relation d'ordre, c'est-à-dire :*

1) *elle est réflexive :* $p \geqslant p$,
2) *elle est antisymétrique : si* $p \geqslant q$ *et* $q \geqslant p$*, alors* $p = q$,
3) *elle est transitive : si* $r \geqslant q$ *et* $q \geqslant p$*, alors* $r \geqslant p$.

DÉMONSTRATION : Cela résulte aussitôt des propriétés de l'addition.

Proposition 1.7 (admis) — *On a les propriétés suivantes :*

1) *Si* $p,q \in \mathbf{N}$ *alors* $p \geqslant q$ *ou* $q \geqslant p$ *(l'ordre est total).*
2) *Pour tous* $a,b,c \in \mathbf{N}$*, on a l'équivalence :*

$$a+b \geqslant a+c \iff b \geqslant c.$$

3) *Il n'existe pas d'entier n tel que* $0 < n < 1$.
4) *Il n'existe pas d'entier n supérieur à tous les autres.*
5) *Si* $q \geqslant p$*, alors* $n \times q \geqslant n \times p$.

DÉMONSTRATION : Pour le point 1), montrer qu'à p fixé, l'ensemble $\{q \in \mathbf{N}, \quad q \leqslant p \text{ ou } q \geqslant p\}$ est égal à $\mathbf{N}$.

Pour le point 2), c'est la règle de simplification.

Pour le point 3), partir de $n < 1$ et en déduire $n = 0$.

Pour le point 4), considérer n et son successeur.

Théorème 1.8 (HP) — $\mathbf{N}$ *est* ***bien ordonné****, c'est-à-dire que toute partie non vide de* $\mathbf{N}$ *admet un plus petit élément.*

DÉMONSTRATION : Par contraposée, montrons que A est une partie de $\mathbf{N}$ qui n'a pas de plus petit élément, alors A est vide. On montre alors par récurrence que "$P(n)$: pour tout $i \leqslant n$, $i \notin A$" est vraie pour tout entier naturel n.

- $P(0)$ est vraie car si $0 \in A$, alors 0 serait le plus petit élément de A.
- Supposons que $P(n)$ soit vraie, montrons que $P(n+1)$ est vraie. Si $P(n)$ est vraie, alors aucun des entiers 0, 1, 2, ..., n n'appartient à A. Si $n+1$ appartenait à A, alors ce serait le plus petit élément de A, donc $n+1 \notin A$, donc $P(n+1)$ est vraie et par le principe de récurrence, $P(n)$ est donc vraie pour tout entier naturel n.

On a aussi :

Théorème 1.9 (HP) — *Toute partie* ***finie*** *non vide de* $\mathbf{N}$ *admet un plus grand élément.*

DÉMONSTRATION : On raisonne par récurrence sur le cardinal de A : $n = |A|$. Pour $n = 1$, A a un unique élément qui est bien le plus grand.

Supposons la propriété établie pour $|A| = n$ et passons à $n+1$. Soit a_0 le plus petit élément de A (qui existe par 1)) et soit $B = A \setminus a_0$. Comme on a $|B| = n$, B admet un plus grand élément qui est aussi le plus grand élément de A, cqfd.

Remarque 3 En fait, le principe de récurrence est équivalent au bon ordre :

Pour le voir on utilise ce qu'on appelle un raisonnement par l'absurde et minimalité. On raisonne d'abord par l'absurde en supposant que $P(n)$ n'est pas vraie pour tous les entiers n et on considère l'ensemble des contre-exemples :

$$C = \{n \in \mathbf{N} \mid P(n) \text{ n'est pas vraie}\}.$$

Par hypothèse, C est non vide et donc, par 1.16.1, il admet un plus petit élément m (qui est donc le contre-exemple minimal : voilà la minimalité). On a $m \neq 0$ (car $P(0)$ est vraie par hypothèse). On considère alors $m-1$ qui est encore dans $\mathbf{N}$ (car m est > 0) et qui est $< m$, donc n'est plus dans C puisque m est le plus petit élément de C. Il s'ensuit que $P(m-1)$ est vraie. Mais comme on a $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour tout n, il en résulte que $P(m)$ est vraie et c'est une contradiction.