Fiche 7 | Convergence des suites

Comment montrer qu'une suite converge ?

Essentiellement, on peut :

- soit utiliser les théorèmes de limites des expressions explicites ($\frac{1}{n}$, q^n, etc... Voir dans le cours !) ;
- soit utiliser des théorèmes de comparaison ;
- soit utiliser le théorème de convergence monotone.

Remarque 1 Attention, toutes les suites n'admettent pas de limite ! C'est pourquoi il faut être prudent.

Méthode 7.1

Montrer qu'une suite converge en utilisant les calculs bruts de limite.

☞ **Exemple 1** Calculer la limite de $u_n := 3^n - 4$.

☞ **Correction exemple 1 :** Ici, $3 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$, de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 = 4$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Remarque 2 Attention, on tombe parfois sur une forme indéterminée, comme un quotient... Voir l'exemple suivant :

☞ **Exemple 2** Calculer la limite de $u_n := \dfrac{3n^2+1}{3-n}$

☞ **Correction exemple 2 :** Pour les limites de quotient, on commence par étudier numérateur et dénominateur :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2+1 = +\infty$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 3-n = -\infty$;

On a donc une forme indéterminée. Pour la lever, ici on **factorise par le terme de plus haut degré**, pour tout $n > 0$:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{3n^2+1}{3-n} \\ &= \frac{n^2(3+1/n^2)}{n(3/n-1)} \\ &= \frac{n(3+1/n^2)}{3/n-1} \end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n(3+1/n^2) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3/n - 1 = -1$,
on n'a donc plus de forme indéterminée ici : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Méthode 7.2

Montrer qu'une suite converge en utilisant un théorème de comparaison.

On utilise essentiellement les résultats suivants :

Théorème 7.1 (divergence par comparaison) — *Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant w_n$, alors :*

- *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$;*
- *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*

☞ **Exemple 3** Si (u_n) est définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (n+1)^2 - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

On peut montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n^2$ donc (u_n) tend vers $+\infty$.

Théorème 7.2 ("des gendarmes") — *Si (u_n), (v_n), (w_n) sont trois suites telles que :*

- *À partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$;*
- *(u_n) et (w_n) convergent vers ℓ.*

Alors (v_n) converge, et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

☞ **Exemple 4** Si (u_n) est définie par

$$u_n = \frac{3+(-1)^n}{n},$$

calculer sa limite.

☞ **Correction exemple 4 :** On encadre le $(-1)^n$ qui nous embête pour montrer que pour tout entier naturel n :

$$\frac{2}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{4}{n}$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = 0$ donc (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Méthode 7.3

Montrer qu'une suite converge en utilisant le théorème de convergence monotone.

Théorème 7.3 (Convergence monotone) — *Toute suite réelle décroissante et minorée converge.*
De même, toute suite croissante et majorée converge.

DÉMONSTRATION : Admis ! Ce théorème a besoin, pour être démontré, d'une construction rigoureuse de $\mathbf{R}$.

☞ **Exemple 5** Si (u_n) est définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0{,}7 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Justifier que (u_n) converge.

☞ **Correction exemple 5 :** On peut montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

Ainsi, (u_n) est **croissante** et **majorée par** 1 : donc (u_n) converge.

Remarque 3 Attention, la limite de la suite précédente n'est pas forcément 1 ! Cela pourrait tout aussi bien être 0,9... Pour en être certain, il faut utiliser d'autres résultats.

La dernière méthode n'est pas vue dans le premier chapitre sur les suites, mais sera justifiée dans un chapitre ultérieur.

Méthode 7.4

Déterminer la limite d'une suite définie par une récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

On utilise le résultat suivant :

Proposition 7.4 — *Soient (u_n) une suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue en ℓ. Alors si (u_n) converge vers ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.*

☞ **Exemple 6** On reprend :

$$\begin{cases} u_0 = 0{,}7 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Calculer la limite de (u_n).

☞ **Correction exemple 6 :** Ici $f(x) = \dfrac{3x}{1+2x}$ est f est continue sur $[0{,}1]$ comme quotient de fonctions affines dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0{,}1]$. Donc comme on a montré que (u_n) converge et que $u_n \in [0{,}1]$, la limite ℓ de (u_n) doit vérifier :

$$\ell = f(\ell).$$

Or on peut résoudre cette équation : $\ell = \dfrac{3\ell}{1+2\ell} \iff 2\ell^2 + \ell = 3\ell$. Les solutions de cette équation sont 0 et 1 : or pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant u_0 = 0{,}7$ (car (u_n) est croissante) donc $\ell = 1$.