♦ **DS 1.1** (**4 points**)

1) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $6n+1$ divise 17.

2) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que 17 divise $n+6$.

3) Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $n+6$ divise $6n+1$.

☞ **Correction exercice 1 :**

1) Soit $n \in \mathbf{Z}$. Alors $6n+1$ divise 17 si et seulement si $6n+1 \in \{-17,-1,1,17\}$, i.e. $n \in \{-3,-\frac{1}{3},0,\frac{8}{3}\}$. Comme n est entier, on en déduit $n \in \{-3,0\}$.

2) Soit $n \in \mathbf{Z}$. Alors 17 divise $n+6$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $n+6 = 17k$, i.e. $n = 17k-6$. Ainsi, l'ensemble des entiers n est $\{17k-6 \mid k \in \mathbf{Z}\}$.

3) Supposons que $n+6$ divise $6n+1$. Alors $n+6$ divise $6(n+6)-(6n+1) = 35$. Donc $n+6 \in \{-35,-7,-5,-1,1,5,7,35\}$ et $n \in \{-41,-13,-11,-7,-5,-1,1,29\}$.
On vérifie dans chaque cas que $n+6$ divise $6n+1$. Ainsi, l'ensemble est $\{-41,-13,-11,-7,-5,-1,1,29\}$.

♦ **DS 1.2** (**4 points**) Dans chaque cas, déterminer le reste r dans la division euclidienne de A par B.

1) $A = 2025$ et $B = 17$;

2) $A = -2025$ et $B = 17$;

3) $A = n^2+n+2$ et $B = n+2$ où $n \in \mathbf{N}$.

☞ **Correction exercice 2 :**

1) $2025 = 119 \times 17 + 2$ donc $r = 2$.

2) $-2025 = (-120) \times 17 + 15$ donc $r = 15$.

3) Soit $n \in \mathbf{N}$. On écrit $n^2+n+2 = (n-1)(n+2)+4$.
- Si $n+2 > 4$, alors $r = 4$.
- Si $n = 0$, alors $A = 2$, $B = 2$, donc $r = 0$.
- Si $n = 1$, alors $A = 4$, $B = 3$, donc $A = B+1$, $r = 1$.
- Si $n = 2$, alors $A = 8$, $B = 4$, donc B divise A, $r = 0$.

♦ **DS 1.3** (**4 points**) Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant sa réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

1) Pour tout entier n, si 5 divise n alors 10 divise $2n$.

2) Pour tous entiers a, b et c, si ab divise c alors a et b divisent c.

3) Pour tous entiers a, b et c, si a et b divisent c alors ab divise c.

☞ **Correction exercice 3 :**

1) Soit $n \in \mathbf{Z}$. Supposons que 5 divise n. Alors, il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $n = 5k$ donc $2n = 10k$ et ainsi 10 divise $2n$. L'affirmation est **VRAIE**.

2) Soit a, b et c des entiers. Supposons que ab divise c. Alors, comme a et b divisent ab, par transitivité, a et b divisent c. L'affirmation est **VRAIE**.

3) L'affirmation est **FAUSSE**. Par exemple, si $a = b = c = 2$ alors a et b divisent c mais $ab = 4$ ne divise pas $c = 2$.

♦ **DS 1.4** (**8 points**) Soit n un entier relatif. On pose $A_n = n^4 - 1$.

1) *Question préliminaire* : montrer que pour tout entier relatif k, k^2+k est un entier pair.

2) Montrer que n^2-1 et n^2+1 divisent A_n.

3) On suppose que n est impair. Montrer que 8 divise n^2-1.

4) En déduire que si n est impair, 16 divise A_n.

5) On suppose que 3 ne divise pas n.

a) En étudiant les restes possibles de la division euclidienne de n par 3, montrer que 3 divise $n-1$ ou $n+1$.

b) En déduire que 3 divise A_n.

6) On suppose que 5 ne divise pas n. Montrer que 5 divise A_n.

7) Le résultat précédent reste-t-il vrai si on remplace 5 par 7 ?

☞ **Correction exercice 4 :**

1) Si $k = 2q$ où $q \in \mathbf{Z}$, alors $2|k$ donc $2|k(k+1)$. De même, si $k = 2q+1$, alors $2|k+1$ donc $2|k(k+1)$. Dans tous les cas, $k(k+1)$ est pair.

2) $A_n = (n^2)^2 - 1 = (n^2-1)(n^2+1)$ donc n^2-1 et n^2+1 divisent A_n.

3) Si n est impair, $n = 2k+1$. Alors $n^2-1 = 4k(k+1)$. Or 2 divise $k(k+1)$ donc 8 divise n^2-1.

4) 16 divise $A_n = (n^2-1)(n^2+1)$ car n étant impair, n^2+1 est pair donc $16|A_n$.

5) Supposons que 3 ne divise pas n.

a) Soit r le reste de n dans la division par 3. Alors $r \in \{1,2\}$. Si $r = 1$, $n-1$ est divisible par 3. Si $r = 2$, $n+1$ est divisible par 3. Donc 3 divise $n-1$ ou $n+1$.

b) Ainsi 3 divise $(n-1)(n+1) = n^2-1$. Comme n^2-1 divise A_n, alors 3 divise A_n.

6) Supposons que 5 ne divise pas n. Alors selon le reste r de n modulo 5, on montre que 5 divise $n-1$, $n+1$ ou n^2+1. Ainsi 5 divise $(n^2-1)(n^2+1) = A_n$.

7) Le résultat n'est pas vrai si l'on remplace 5 par 7. Par exemple, $n = 2$: 7 ne divise pas 2 et $A_2 = 15$ n'est pas divisible par 7.