♦ SED.1 — Déterminer la forme canonique d'un polynôme du second degré

Déterminer la forme canonique des polynômes suivants :

$P(x) = x^2 - 4x + 7$ $\qquad Q(x) = 3x^2 - 9x + 2$

☞ **Correction exercice 1 :**

1. **Forme canonique de P**

   On fait apparaitre une identité remarquable :

   $P(x) = x^2-4x+7 = \underbrace{x^2 - 4x + 4}_{\text{Identité}}-4+7 = (x-2)^2+3$

   Conclusion : $\boxed{P(x) = (x-2)^2 + 3}$

2. **Forme canonique de Q**

   On utilise les propriétés de la parabole :

   L'abscisse du sommet est $\frac{-(-9)}{2\times 3} = \frac{3}{2}$

   L'ordonnée du sommet est $Q\left(\frac{3}{2}\right) = 3\times\left(\frac{3}{2}\right)^2-9\times\frac{3}{2}+2 = -\frac{19}{4}$

   Conclusion : $\boxed{Q(x) = 3\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{19}{4}}$

♦ SED.2 — Résoudre une équation

Résoudre les équations suivantes :

(E_1) : $-3x^2 - 5x + 2 = 0$ $\qquad (E_2)$: $4x^2 - 4x + 1 = 0$ $\qquad (E_3)$: $2x^2 - 5x + 7 = 0$

☞ **Correction exercice 2 :**

1. **Résolution de (E_1) :**

   $\Delta = (-5)^2 - 4\times(-3)\times 2 = 25 + 24 = 49$

   $\Delta > 0$ donc l'équation admet les deux solutions α_1 et α_2 suivantes :

   - $\alpha_1 = \dfrac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times(-3)} = \dfrac{5+7}{-6} = -2$
   - $\alpha_2 = \dfrac{-(-5)-\sqrt{49}}{2\times(-3)} = \dfrac{5-7}{-6} = \dfrac{1}{3}$

   Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}_1 = \left\{-2; \frac{1}{3}\right\}}$

2. **Résolution de (E_2) :**

   $\Delta = (-4)^2 - 4\times 4\times 1 = 16 - 16 = 0$

   $\Delta = 0$ donc l'équation admet l'unique solution :

   $\alpha = \dfrac{-(-4)}{2\times 4} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

   Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}_2 = \left\{\frac{1}{2}\right\}}$

3. **Résolution de (E_3) :**

   $\Delta = (-5)^2 - 4\times 2\times 7 = 25 - 56 = -31$

   $\Delta < 0$ donc l'équation n'admet pas de solution.

   Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}_3 = \varnothing}$

♦ SED.3 — Factoriser une expression du second degré

Factoriser les polynômes suivants :

$f(x) = 4x^2 + 7x + 3$ $\qquad g(x) = -2x^2 + 8x - 8$ $\qquad h(x) = -3x^2 + 5x - 8$

☞ **Correction exercice 3 :**

1. **Factorisation de f**

   $\Delta = 7^2 - 4\times 4\times 3 = 49 - 48 = 1$

   $\Delta > 0$ donc f admet les deux racines α_1 et α_2 suivantes :

   - $\alpha_1 = \dfrac{-7+\sqrt{1}}{2\times 4} = \dfrac{-7+1}{8} = -\dfrac{3}{4}$
   - $\alpha_2 = \dfrac{-7-\sqrt{1}}{2\times 4} = \dfrac{-7-1}{8} = -1$

   Conclusion : $\boxed{f(x) = 4\left(x+\frac{3}{4}\right)(x+1)}$

2. **Factorisation de g**
   $\Delta = 8^2 - 4 \times (-2) \times (-8) = 64 - 64 = 0$
   $\Delta = 0$ donc g admet l'unique racine :
   $\alpha = \dfrac{-8}{2 \times (-2)} = \dfrac{-8}{-4} = 2$
   Conclusion : $\boxed{g(x) = -2(x-2)^2}$

3. **Factorisation de h**
   $\Delta = 5^2 - 4 \times (-3) \times (-8) = 25 - 96 = -71$
   $\Delta < 0$ donc $\boxed{\text{on ne peut pas factoriser } h}$

♦ SED.4 — Signe d'une expression du second degré - Inéquations

Résoudre les inéquations suivantes :

(I_1) : $x^2 - 7x + 10 \leqslant 0$ (I_2) : $-5x^2 - 8x + 13 < 0$ (I_3) : $36x^2 - 12x + 1 > 0$

☞ **Correction exercice 4 :**

1. **Résolution de (I_1)**
   On pose $f(x) = x^2 - 7x + 10$
   $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 10 \times 1 = 49 - 40 = 9$
   $\Delta > 0$ donc f admet les deux racines α_1 et α_2 suivantes :
   - $\alpha_1 = \dfrac{-(-7)+\sqrt{9}}{2 \times 1} = \dfrac{7+3}{2} = 5$
   - $\alpha_2 = \dfrac{-(-7)-\sqrt{9}}{2 \times 1} = \dfrac{7-3}{2} = 2$

   Le coefficient de x^2 est positif (1) donc le tableau de signe de f est donné par :

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}_1 = [2\,;5]}$

2. **Résolution de (I_2)**
   On pose $g(x) = -5x^2 - 8x + 13$
   $\Delta = (-8)^2 - 4 \times (-5) \times 13 = 64 + 260 = 324$
   $\Delta > 0$ donc g admet les deux racines α_1 et α_2 suivantes :
   - $\alpha_1 = \dfrac{-(-8)+\sqrt{324}}{2 \times (-5)} = \dfrac{8+18}{-10} = -\dfrac{13}{5}$
   - $\alpha_2 = \dfrac{-(-8)-\sqrt{324}}{2 \times (-5)} = \dfrac{8-18}{-10} = 1$

   Le coefficient de x^2 est négatif (-5) donc le tableau de signe de g est donné par :

x	$-\infty$		$-\frac{13}{5}$		1		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}_2 = \left]-\infty\,;-\frac{13}{5}\right[\cup\,]1\,;+\infty[}$

3. **Résolution de (I_3)**
   On pose $h(x) = 36x^2 - 12x + 1$
   $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 36 \times 1 = 144 - 144 = 0$
   $\Delta = 0$ donc h admet l'unique racine
   $\alpha = \dfrac{-(-12)}{2 \times 36} = \dfrac{1}{6}$
   Le coefficient de x^2 est positif (36) donc le tableau de signe de h est donné par :

x	$-\infty$		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
Signe de $h(x)$		$+$	0	$+$	

   Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}_3 = \left]-\infty\,;\frac{1}{6}\right[\cup \left]\frac{1}{6}\,;+\infty\right[}$

♦ SED.5

Résoudre l'inéquation suivante :

$$(I) : (-2x+4)(x^2-2x-15) < 0$$

☞ **Correction exercice 5 :**

$$(I) \Leftrightarrow f(x) \times g(x) < 0.$$

avec $f(x) = -2x + 4$ et $g(x) = x^2 - 2x - 15$.

Il suffit donc d'étudier le signe de f et g.

- D'une part f est une fonction affine de coefficient directeur négatif et qui s'annule en 2.
- D'autre part g est une fonction polynôme du second degré dont le coefficient de x^2 est positif.
  $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 64$
  $\Delta > 0$ donc g admet les deux racines α_1 et α_2 suivantes :
  - $\alpha_1 = \dfrac{-(-2)+\sqrt{64}}{2 \times 1} = \dfrac{2+8}{2} = 5$
  - $\alpha_2 = \dfrac{-(-2)-\sqrt{64}}{2 \times 1} = \dfrac{2-8}{2} = -3$

Tout ceci permet de dresser le tableau ci-dessous :

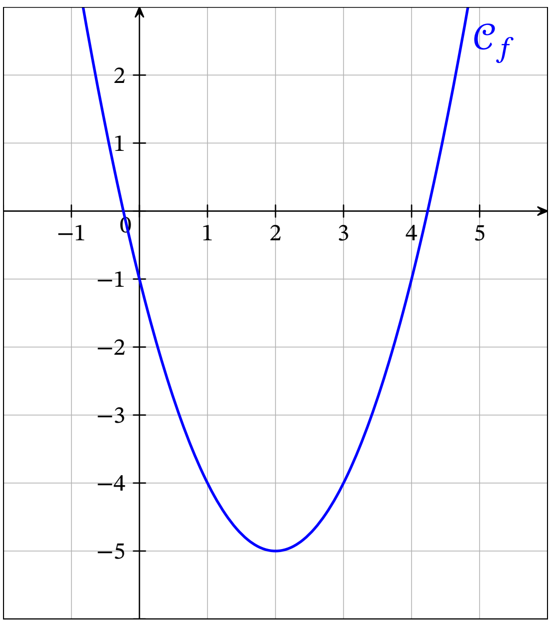
x	$-\infty$		-3		2		5		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $g(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f(x) \times g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

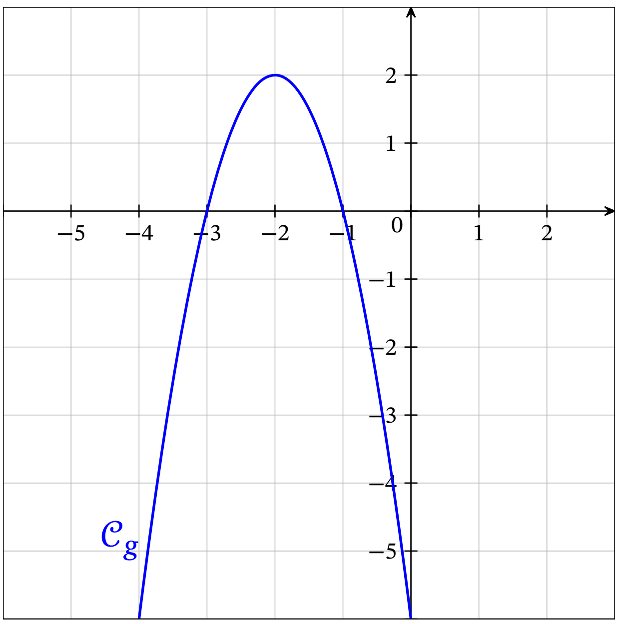
Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} =]-3\,;2[\, \cup\,]5\,;+\infty[}$

♦ **SED.6** **Faire le lien avec la représentation graphique**

Déterminer l'expression des fonctions polynômes du second degré représentées ci-dessous :

☞ **Correction exercice 6 :**





1. **Expression de f**
   f est un polynôme du second degré. L'expression de f en fonction de x est donc, en utilisant la forme canonique : $f(x) = a\,(x-\alpha)^2 + \beta$.
   - Par lecture graphique, on voit que le sommet de la parabole a pour coordonnées $(2\,;-5)$.
     On en déduit : $\alpha = 2$ et $\beta = -5$.
     Ainsi $f(x) = a\,(x-2)^2 - 5$
   - Par lecture graphique, on a aussi $f(0) = -1$.
     On en déduit : $a\,(0-2)^2 - 5 = -1$ soit $4a - 5 = -1$ donc $4a = 4$ et donc $a = 1$.

   Conclusion : $\boxed{f(x) = (x-2)^2 - 5}$

2. **Expression de** g

   On peut utiliser la méthode précédente. Il est aussi possible d'utiliser la méthode suivante :

   La parabole représentant g coupe deux fois l'axe des abscisses donc g admet deux racines. L'expression de g en fonction de x est donc de la forme $g(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$.

   - La parabole coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -3 et -1 donc les racines de g sont -3 et -1.
     Ainsi $g(x) = a(x+3)(x+1)$
   - Le point $S(-2\,;2)$ appartient à la parabole donc $g(-2) = 2$.
     On en déduit : $a(-2+3)(-2+1) = 2$ soit $a \times 1 \times (-1) = 2$ donc $-a = 2$ et donc $a = -2$.

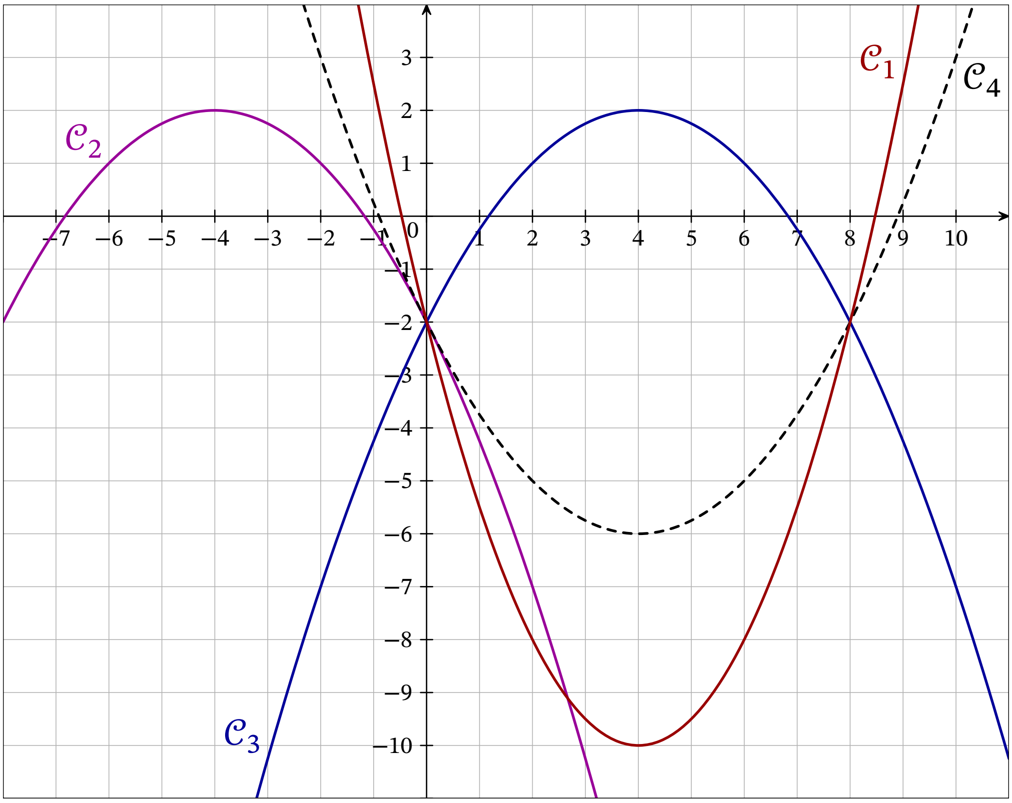
   Conclusion : $\boxed{g(x) = -2(x+3)(x+1)}$

♦ SED.7

Les quatre courbes ci-dessous sont les représentations graphiques des fonctions f, g, h et k définies par :

$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 2\,;$ $\quad g(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 2x - 2\,;$ $\quad h(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x - 2\,;$ $\quad k(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x - 2$

Associer à chaque fonction sa représentation graphique. Justifier les réponses.



☞ **Correction exercice 7 :** Les coefficients de x^2 des fonctions f et g sont négatifs, leurs représentations graphiques sont donc des paraboles ouvertes vers le bas. $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont donc les représentations graphiques de f et g et par suite $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_4$ sont les représentations graphiques de h et k.

Le sommet de la parabole représentant f a pour abscisse $\frac{-2}{2\times-\frac{1}{4}} = 4$ et le sommet de la parabole représentant g a pour abscisse $\frac{2}{2\times-\frac{1}{4}} = -4$.

$\boxed{\mathcal{C}_2 \text{ est donc la représentation graphique de } g \text{ et } \mathcal{C}_3 \text{ la représentation graphique de } f}$

L'image de 4 par h est $h(4) = \frac{1}{4} \times 4^2 - 2 \times 4 - 2 = -6$ et l'image de 4 par k est $k(4) = \frac{1}{2} \times 4^2 - 4 \times 4 - 2 = -10$. De plus, $\mathcal{C}_1$ passe par le point $(4\,;-10)$ et $\mathcal{C}_4$ passe par le point $(4\,;-6)$. On en déduit :

$\boxed{\mathcal{C}_1 \text{ est la représentation graphique de } k \text{ et } \mathcal{C}_4 \text{ la représentation graphique de } h}$

♦ SED.8 — Résoudre des problèmes

Trouver deux réels dont la somme est 4 et le produit -5.

☞ **Correction exercice 8 :** On appelle x et y les deux réels cherchés. x et y vérifient le système suivant : (S) : $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=-5 \end{cases}$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x \\ x(4-x)=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x \\ 4x-x^2=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x \\ -x^2+4x+5=0 \quad (E) \end{cases}$$

L'équation (E) est une équation du second degré que l'on peut donc résoudre :

$\Delta = 4^2 - 4\times(-1)\times 5 = 16+20 = 36$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet les deux solutions α_1 et α_2 suivantes :

• $\alpha_1 = \dfrac{-4+\sqrt{36}}{2\times(-1)} = \dfrac{-4+6}{-2} = -1$ • $\alpha_2 = \dfrac{-4-\sqrt{36}}{2\times(-1)} = \dfrac{-4-6}{-2} = 5$

En revenant au système (S), on obtient donc :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x \\ x=-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=4-x \\ x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-(-1) \\ x=-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=4-5 \\ x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \\ x=-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=-1 \\ x=5 \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Les deux réels cherchés sont } -1 \text{ et } 5}$

♦ SED.9

Trois nombres entiers relatifs consécutifs sont tels que si on ajoute à celui du milieu le carré du plus grand et le carré du plus petit, on obtient 30.

Quels sont ces trois nombres ?

☞ **Correction exercice 9 :** Soit x l'entier du milieu. Les deux autres sont alors $x-1$ et $x+1$.

D'après l'énoncé, x vérifie l'équation : $(E)\ :\ x+(x+1)^2+(x-1)^2 = 30$.

$(E) \Leftrightarrow x+x^2+2x+1+x^2-2x+1-30=0 \Leftrightarrow 2x^2+x-28=0$

L'équation (E) est une équation du second degré que l'on peut donc résoudre :

$\Delta = 1^2 - 4\times(-28)\times 2 = 1+224 = 225$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet les deux solutions α_1 et α_2 suivantes :

• $\alpha_1 = \dfrac{-1+\sqrt{225}}{2\times 2} = \dfrac{14}{4} = \dfrac{7}{2}$

• $\alpha_2 = \dfrac{-1-\sqrt{225}}{2\times 2} = \dfrac{-16}{4} = -4$

L'énoncé indique que les trois nombres sont des entiers. Le problème admet donc une unique solution et -4 est le nombre du milieu.

Conclusion : $\boxed{\text{Les trois nombres cherchés sont } -5, -4 \text{ et } -3.}$

♦ SED.10

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = -0{,}005x^2 + 0{,}6x - 10$.
   a) Dresser le tableau de variations de f.
   b) Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.
2. Une entreprise fabrique et vend des ordinateurs portables.
   Le coût de fabrication de x ordinateurs est donné par la fonction C définie par $C(x) = 0{,}005x^2 + 0{,}4x + 10$, ce coût est exprimé en milliers d'euros.

L'entreprise produit entre 0 et 200 ordinateurs par jour et chaque ordinateur est vendu 1000 euros. On suppose que toute la production est vendue.

a) On note $R(x)$ la recette, en milliers d'euros, engendrée par la vente de x ordinateurs. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.

b) Montrer que le bénéfice, en milliers d'euros, est donné par la fonction B définie sur $[0\,;200]$ par $B(x) = f(x) = -0{,}005x^2 + 0{,}6x - 10$.

c) En utilisant les résultats de la première question :
- déterminer le bénéfice maximum de l'entreprise.
- déterminer la quantité d'ordinateurs à fabriquer pour que le bénéfice de l'entreprise soit positif ou nul.

Correction exercice 10 :

1. a) f est un polynôme du second degré dont le coefficient de x^2 est négatif et qui change de variations en $\dfrac{-0{,}6}{2 \times (-0{,}005)} = 60$.
   On a de plus : $f(60) = -0{,}005 \times 60^2 + 0{,}6 \times 60 - 10 = -18 + 36 - 10 = 8$
   On obtient donc le tableau :

x	$-\infty$	60	$+\infty$
Variations de f	$\nearrow$	8	$\searrow$

   b) Le discriminant de f est $\Delta = 0{,}6^2 - 4 \times (-0{,}005) \times (-10) = 0{,}16$.
   f admet donc les deux racines : (calculs à faire) $\alpha_1 = 20$ et $\alpha_2 = 100$
   L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $\boxed{\mathcal{S} =]20\,;100[}$

2. a) Chaque ordinateur est vendu 1000 euros donc 1 millier d'euros. La recette liée à la vente de ces x ordinateurs est donc $\boxed{R(x) = x \times 1 = x}$

   b) Le bénéfice est la différence entre les recettes et le coût de production donc :
   $B(x) = R(x) - C(x) = x - (0{,}005x^2 + 0{,}4x + 10) = x - 0{,}005x^2 - 0{,}4x - 10 = -0{,}005x^2 + 0{,}6x - 10$
   $\boxed{B(x) = -0{,}005x^2 + 0{,}6x - 10 = f(x)}$

   c)
   - Le tableau de variations de f permet de voir que le bénéfice maximum de l'entreprise est 8 milliers d'euros obtenu par la production et la vente de 60 ordinateurs par jour.
   - Le bénéfice sera positif ou nul lorsque $f(x) > 0$. La réponse à la question 1. permet d'affirmer que le bénéfice sera positif ou nul pour une production journalière comprise entre 20 et 100 ordinateurs.

♦ SED.11

On considère l'équation $(E)\,:\,x^2 + (1 - \sqrt{2})x - 2\sqrt{2} - 4 = 0$.

1. Démontrer que le discriminant Δ de l'équation (E) vérifie : $\Delta = \left(1 + 3\sqrt{2}\right)^2$.
2. Résoudre l'équation (E).
3. On considère la fonction polynomiale $P(x) = x^2 + (1 - \sqrt{2})x - 2\sqrt{2} - 4$.
   Donner le tableau de signe et le tableau de variations de P.

Correction exercice 11 :

On considère l'équation $(E)\,:\,x^2 + (1 - \sqrt{2})x - 2\sqrt{2} - 4 = 0$.

1. $\Delta = \left(1-\sqrt{2}\right)^2 - 4(-2\sqrt{2}-4) = 1-2\sqrt{2}+2+8\sqrt{2}+16 = 19+6\sqrt{2}$

   De plus $\left(1+3\sqrt{2}\right)^2 = 1+6\sqrt{2}+(3\sqrt{2})^2 = 1+6\sqrt{2}+18 = 19+6\sqrt{2}$

   Conclusion : $\boxed{\Delta = \left(1+3\sqrt{2}\right)^2}$.

2. $\Delta > 0$ donc l'équation (E) admet deux solutions :

   $x_1 = \dfrac{-(1-\sqrt{2})+(1+3\sqrt{2})}{2} = \dfrac{-1+\sqrt{2}+1+3\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

   $x_2 = \dfrac{-(1-\sqrt{2})-(1+3\sqrt{2})}{2} = \dfrac{-1+\sqrt{2}-1-3\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2}$

   Les solutions sont donc $\boxed{\mathcal{S} = \{2\sqrt{2}; -1-\sqrt{2}\}}$

3. On a déjà les racines de P donc son tableau de signe est ($a = 1 > 0$) :

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de $P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   De plus les valeurs α et β de la forme canonique de $P(x)$ se calculent aisément : $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ et $\beta = P(\alpha) = \dfrac{-6\sqrt{2}-19}{4}$

   Donc finalement :

x	$-\infty$	$\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$	$+\infty$
Variations de P	$\searrow$	$\dfrac{-6\sqrt{2}-19}{4}$	$\nearrow$

♦ SED.12

1. Résoudre les équations suivantes, en posant $X = \sqrt{x}$ pour (E_1) :

$$(E_1)\ :\ 7x + 11\sqrt{x} - 6 = 0 \qquad (E_2)\ :\ \sqrt{-4x+5} = -2x-1$$

2. Résoudre l'inéquation suivante :

$$(I)\ :\ \frac{x^2-4x-2}{-2x+1} \leqslant 1$$

☞ Correction exercice 12 :

1. $(E_1) \Leftrightarrow \begin{cases} X = \sqrt{x} \\ 7X^2 + 11X - 6 = 0 \end{cases}$

   Après calculs, on obtient les solutions de $7X^2+11X-6=0$: -2 et $\dfrac{3}{7}$.

   Ainsi : $(E_1) \Leftrightarrow \begin{cases} X = \sqrt{x} \\ X = -2 \text{ ou } X = \dfrac{3}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x} = -2 \text{ ou } \sqrt{x} = \dfrac{3}{7} \Leftrightarrow x = \dfrac{9}{49}$

   On a donc : $\boxed{\mathcal{S}_1 = \left\{\dfrac{9}{49}\right\}}$

2.
$$(E_2) \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+5=(-2x-1)^2 \\ -2x-1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+5=4x^2+4x+1 \\ -2x-1 \geqslant 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+8x-4=0 \\ -2x-1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-1=0 \\ -2x-1 \geqslant 0 \end{cases}$$

Les solutions de $x^2+2x-1=0$ sont $-1+\sqrt{2}$ et $-1-\sqrt{2}$. On a donc :

$$(E_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+\sqrt{2} \text{ ou } x=-1-\sqrt{2} \\ -2x-1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1-\sqrt{2}$$

On a donc $\boxed{\mathcal{S}_2=\left\{-1-\sqrt{2}\right\}}$

3. $(I) \Leftrightarrow \dfrac{x^2-4x-2}{-2x+1}-1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-4x-2-(-2x+1)}{-2x+1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x-3}{-2x+1} \leqslant 0$

Les racines de x^2-2x-3 sont, après calculs, -1 et 3.

On peut donc dresser le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
Signe de x^2-2x-3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $-2x+1$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $\dfrac{x^2-2x-3}{-2x+1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}=\left[-1\,;\,\frac{1}{2}\right[\cup [3\,;\,+\infty[}$

♦ SED.13

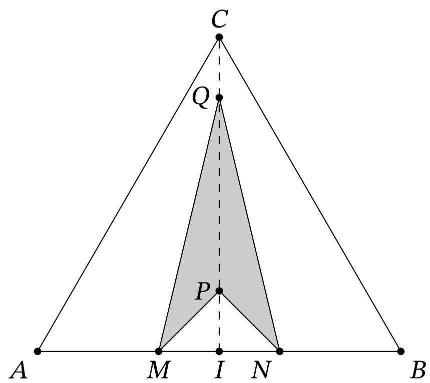
Soit ABC un triangle équilatéral de côté 12 cm et I le milieu du segment $[AB]$.

Pour tout $x \in \mathcal{D}=[0;3\sqrt{3}]$, on construit les points M, N, P, Q tels que :

- $M \in [AI]$,
- $N \in [IB]$,
- $P \in [IC]$,
- $Q \in [IC]$,
- $IM=IN=IP=CQ=x$.

On s'intéresse à l'aire du quadrilatère $MPNQ$, qu'on note $\mathcal{A}(x)$.

1. Montrer que $IC=6\sqrt{3}$.
2. Montrer que pour tout x appartenant à $\mathcal{D}$, on a :
$$\mathcal{A}(x)=-2x^2+6\sqrt{3}x.$$
3. Déterminer les valeurs de x (dans $\mathcal{D}$), telle que l'aire $\mathcal{A}(x)$ soit supérieure à 1 cm^2.
4. Déterminer si l'aire $\mathcal{A}(x)$ admet un extremum. Préciser sa nature (minimum ou maximum) et donner sa valeur, ainsi que la valeur de x pour laquelle il est atteint.



☞ **Correction exercice 13 :**

1. On a : $IB = 6$ et $CB = 12$, de plus CI est rectangle en I donc d'après le théorème de Pythagore :
   $IC = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = \sqrt{36 \times 3} = 6\sqrt{3}$
2. On utilise la formule $\dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$ pour calculer l'aire du triangle QPN (avec PQ pour base et IN pour hauteur) :
   $\mathcal{A}_{QPN} = \dfrac{(6\sqrt{3} - 2x)x}{2} = 3\sqrt{3}x - x^2$
   Par symétrie, l'aire $\mathcal{A}(x)$ est deux fois l'aire $\mathcal{A}_{QPN}$ donc :
   $$\boxed{\mathcal{A}(x) = -2x^2 + 6\sqrt{3}x}$$
3. Résolvons l'inéquation $\mathcal{A}(x) \geq 1$:
   $-2x^2 + 6\sqrt{3}x \geq 1$
   $-2x^2 + 6\sqrt{3}x - 1 \geq 0$
   On étudie le signe de $x \mapsto -2x^2 + 6\sqrt{3}x - 1$: il faut donc calculer les racines de cette fonction, qui sont (je vous fais grâce des calculs) $\dfrac{3\sqrt{3}+5}{2}$ et $\dfrac{3\sqrt{3}-5}{2}$.
   Comme $-2 < 0$, l'inégalité de départ est vérifiée si $\boxed{x \in \left[\dfrac{3\sqrt{3}-5}{2} ; \dfrac{3\sqrt{3}+5}{2}\right]}$, cet intervalle est bien inclus dans $\mathcal{D}$.
4. D'après le cours, $\boxed{\text{l'aire } \mathcal{A}(x) \text{ admet un maximum atteint en } \dfrac{-6\sqrt{3}}{2 \times (-2)} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$.
   Ce maximum vaut $\boxed{\mathcal{A}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right) = -2\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 6\sqrt{3} \times \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{27}{2}}$.