♦ **BAC.1** (**Métropole, J1, 2025**) Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.

La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

Partie A - Étude d'un modèle discret

Pour tout entier naturel n, on note u_n la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au premier juillet de l'année $2024+n$. Ainsi, $u_0=1$.

Une étude conduite sur cette superficie a permis d'établir que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}=-0{,}02u_n^2+1{,}3u_n.$$

1) Calculer la superficie que devrait recouvrir la posidonie au premier juillet 2025 d'après ce modèle.

2) On note h la fonction définie sur $[0\,;20]$ par

$$h(x)=-0{,}02x^2+1{,}3x.$$

On admet que h est croissante sur $[0\,;20]$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $1\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant 20$.

b) En déduire que la suite (u_n) converge. On note L sa limite.

c) Justifier que $L=15$.

3) Les biologistes souhaitent savoir au bout de combien de temps la surface recouverte par la posidonie dépassera les 14 hectares.

a) Sans aucun calcul, justifier que, d'après ce modèle, cela se produira.

b) Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'en fin d'exécution, il affiche la réponse à la question des biologistes.

```
def seuil():
  n=0
  u= 1
  while ...... :
    n=......
    u=......
  return n
```

Partie B - Étude d'un modèle continu

Pas encore vu en classe !

On souhaite décrire la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie au cours du temps avec un modèle continu.

Dans ce modèle, pour une durée t, en année, écoulée à partir du premier juillet 2024, la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie est donnée par $f(t)$, où f est une fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ vérifiant :

- $f(0)=1$;
- f ne s'annule pas sur $[0\,;\,+\infty[$;
- f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$;
- f est solution sur $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_1):\quad y'=0{,}02y(15-y).$$

On admet qu'une telle fonction f existe ; le but de cette partie est d'en déterminer une expression.

On note f' la fonction dérivée de f.

1) Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t)=\dfrac{1}{f(t)}$.
Montrer que g est solution de l'équation différentielle

$$(E_2):\quad y'=-0{,}3y+0{,}02.$$

2) Donner les solutions de l'équation différentielle (E_2).

3) En déduire que pour tout $t\in[0\,;\,+\infty[$:

$$f(t)=\frac{15}{14\mathrm{e}^{-0{,}3t}+1}.$$

4) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

5) Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $f(t)>14$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

♦ **BAC.2** (**Amérique du Nord, J1 2025**) On considère la suite numérique (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}.$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1) Calculer le terme u_1.

2) On définit la suite (a_n) pour tout entier naturel n, par :

$$a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}.$$

On admet que la suite (a_n) est bien définie.

a) Calculer a_0 et a_1.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$a_n \geqslant 3n - 1.$$

d) En déduire la limite de la suite (a_n).

3) On souhaite étudier la limite de la suite (u_n).

a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{a_n}{a_n - 1}$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

4) On admet que la suite (u_n) est décroissante.
On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```python
def algo(p):
    u=2
    n=0
    while u-1>p:
        u=(2*u+1)/(u+2)
        n=n+1
    return (n,u)
```

a) Interpréter les valeurs `n` et `u` renvoyées par l'appel de la fonction `algo(p)` dans le contexte de l'exercice.

b) Donner, sans justifier, la valeur de n pour $p = 0{,}001$.

♦ **BAC.3** (**Amérique de Nord, J2 secours 2025**) L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n. \end{cases}$$

Partie A - Conjecture

1) Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			

2) Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Partie B - Étude d'une suite auxiliaire

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

1) Calculer w_0.

2) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3) Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n.

4) Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n.$$

5) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\quad u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Partie C - Étude de la suite (u_n)

1) Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.

2) En déduire que la suite (u_n) est convergente sans chercher à calculer la valeur de la limite.

3) On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell$.
Déterminer la limite de la suite (u_n).

♦ **BAC.4** **(Asie, J1, 2025)** Un patient doit prendre toutes les heures une dose de 2 ml d'un médicament.

On introduit la suite (u_n) telle que le terme u_n représente la quantité de médicament, exprimée en ml présente dans l'organisme immédiatement après n prises de médicament.

On a $u_1 = 2$ et

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ strictement positif : } u_{n+1} = 2 + 0{,}8u_n.$$

Partie A

En utilisant ce modèle, un médecin cherche à savoir à partir de combien de prises du médicament la quantité présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL.

1) Calculer la valeur u_2.

2) Montrer par récurrence que :

$$u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1} \text{ pour tout entier naturel } n \text{ strictement positif.}$$

3) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et et donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.

4) Soit N un entier naturel strictement positif, l'inéquation $u_N \geqslant 10$ admet-elle des solutions ?
Interpréter le résultat de cette question dans le contexte de l'exercice.

5) *Répondre à cette question uniquement avec la calculatrice, pour l'instant.*
Déterminer à partir de combien de prises de médicament la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL. Justifier votre démarche.

Partie B

En utilisant la même modélisation, le médecin s'intéresse à la quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du malade au cours du temps.

On définit pour cela la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n strictement positif par

$$S_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

On admet que la suite (S_n) est croissante.

1) Calculer S_2.

2) Montrer que pour tout entier naturel n strictement positif,

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0{,}8^n.$$

3) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

4) On donne la fonction `mystere` suivante, écrite en langage Python :

```python
def mystere(k):
    n = 1
    s = 2
    while s < k:
        n = n + 1
        s = 10 - 40/n + (40*0.8**n)/n
    return n
```

Dans le contexte de l'énoncé, que représente la valeur renvoyée par la saisie `mystere(9)` ?

5) Justifier que cette valeur est strictement supérieure à 10.