♦ **BAC.1** (**Métropole, J1, 2025**) Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.

La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

Partie A - Étude d'un modèle discret

Pour tout entier naturel n, on note u_n la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au premier juillet de l'année $2024+n$. Ainsi, $u_0 = 1$.

Une étude conduite sur cette superficie a permis d'établir que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = -0{,}02u_n^2 + 1{,}3u_n.$$

1) Calculer la superficie que devrait recouvrir la posidonie au premier juillet 2025 d'après ce modèle.

2) On note h la fonction définie sur $[0\,;20]$ par

$$h(x) = -0{,}02x^2 + 1{,}3x.$$

On admet que h est croissante sur $[0\,;20]$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$.

b) En déduire que la suite (u_n) converge. On note L sa limite.

c) Justifier que $L = 15$.

3) Les biologistes souhaitent savoir au bout de combien de temps la surface recouverte par la posidonie dépassera les 14 hectares.

a) Sans aucun calcul, justifier que, d'après ce modèle, cela se produira.

b) Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'en fin d'exécution, il affiche la réponse à la question des biologistes.

```
def seuil():
  n=0
  u= 1
  while ...... :
    n=......
    u=......
  return n
```

Partie B - Étude d'un modèle continu

Pas encore vu en classe !

On souhaite décrire la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie au cours du temps avec un modèle continu.

Dans ce modèle, pour une durée t, en année, écoulée à partir du premier juillet 2024, la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie est donnée par $f(t)$, où f est une fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ vérifiant :

- $f(0) = 1$;
- f ne s'annule pas sur $[0\,;\,+\infty[$;
- f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$;
- f est solution sur $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_1) : \quad y' = 0{,}02y(15-y).$$

On admet qu'une telle fonction f existe ; le but de cette partie est d'en déterminer une expression.

On note f' la fonction dérivée de f.

1) Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.
Montrer que g est solution de l'équation différentielle

$$(E_2) : \quad y' = -0{,}3y + 0{,}02.$$

2) Donner les solutions de l'équation différentielle (E_2).

3) En déduire que pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$:

$$f(t) = \frac{15}{14e^{-0{,}3t}+1}.$$

4) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

5) Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $f(t) > 14$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Correction exercice 1 :

Partie A - Étude d'un modèle discret

1) Le premier juillet 2025 étant le premier juillet 2024 + 1, on demande ici de calculer : $u_1 = u_{0+1} = -0{,}02u_0^2 + 1{,}3u_0 = -0{,}02 \times 1^2 + 1{,}3 \times 1 = 1{,}3 - 0{,}02 = 1{,}28$.

D'après ce modèle, au premier juillet 2025, la posidonie recouvrera une superficie de 1,28 ha.

2) On remarque que la fonction h introduite dans la question est la fonction de récurrence de la suite, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, on a : $h(u_n) = u_{n+1}$.

Pour tout entier naturel n, on pose l'affirmation P_n : « $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$. »

Initialisation : pour $n = 0$, on a, d'après la définition de la suite $u_0 = 1$ et d'après la question précédente $u_1 = 1{,}28$.

On constate donc que l'affirmation P_0 est vraie.

Hérédité : On suppose que, pour un entier naturel n, l'affirmation P_n est vraie.

Par hypothèse, on a donc :

$$\begin{aligned}
1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20 &\implies h(1) \leqslant h(u_n) \leqslant h(u_{n+1}) \leqslant h(20) \\
&\quad \text{car } h \text{ est supposée croissante sur } [0\ ;\ 20] \\
&\implies 1{,}28 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 18 \quad \text{car } h(1) = 1{,}28 \text{ et } h(20) = 18. \\
&\implies 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 20 \quad \text{car } 1 \leqslant 1{,}28 \text{ et } 18 \leqslant 20.
\end{aligned}$$

Si P_n est vraie, alors P_{n+1} est donc vraie aussi.

Conclusion : On a établi que la propriété était vraie au rang 0, et que, pour n naturel n, P_n est vraie alors P_{n+1} l'est aussi, donc d'après le principe de récurrence, on en déduit : $\forall n \in \mathbf{N},\quad 1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$.

3) D'après la question précédente, on a :

- $\forall n \in \mathbf{N},\quad 1 \leqslant u_n \leqslant 20$: la suite est bornée par 1 et 20 ;
- $\forall n \in \mathbf{N},\quad u_n \leqslant u_{n+1}$: la suite est croissante ;

La suite est donc croissante et majorée, elle est donc convergente, vers une limite L.

Comme la suite est bornée par 1 et 20, on en déduit que la limite L est donc un réel de l'intervalle $[1\ ;\ 20]$.

4) La suite u est définie par récurrence, sa fonction de récurrence étant continue (la fonction h est un polynôme de degré 2, donc continue sur son ensemble de définition); la suite est également convergente. D'après le théorème du point fixe, on en déduit que la limite de la suite (u_n) doit être une solution à l'équation $h(x) = x$.

Résolvons cette équation :

$$\begin{aligned}
h(x) = x &\iff -0{,}02x^2 + 1{,}3x = x \\
&\iff -0{,}02x^2 + 0{,}3x = 0 \\
&\iff -0{,}02x\left(x + \frac{0{,}3}{-0{,}02}\right) = 0 \\
&\iff -0{,}02x(x - 15) = 0 \\
&\iff x = 0 \text{ ou bien } x = 15
\end{aligned}$$

L'équation a deux solutions, 0 et 15, et parmi ces deux solutions, seule 15 est dans l'intervalle $[1\ ;\ 20]$, dont on a établi qu'il contient la limite L.

La limite de la suite est donc bien $L = 15$.

5) a) Puisque la suite converge vers 15, tout intervalle ouvert contenant 15 doit contenir tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang.

L'intervalle $]14\ ;\ +\infty[$ est un tel intervalle, donc il existe un rang N_0 à partir duquel les termes de la suite sont dans l'intervalle $]14\ ;\ +\infty[$, et sont donc supérieurs à 14.

Il existe donc une année à partir de laquelle la posidonie recouvrira une surface dépassant les 14 ha.

b) Il s'agit ici d'un algorithme de seuil classique, `n` et `u` sont initialisées à 0 et u_0 respectivement. Tant que le terme stocké dans la variable `u` restera inférieur ou égal à 14, alors on mettra à jour ces deux variables pour qu'elles contiennent respectivement l'indice suivant et le terme suivant dans la suite.

Cela donne :

```
def seuil():
    n=0
    u=1
    while u < = 14 :
        n= n+1
        u= -0.02*u**2 + 1.3*u
    return n
```

Remarque : Il y a une légère ambigüité sur l'interprétation de l'expression « dépassera les 14 hectares ». On a choisi dans ce corrigé de le comprendre comme « devenant strictement supérieur à 14 hectares ».

Si on interprète comme « devenant supérieur ou égal à 14 hectares », alors la quatrième ligne de l'algorithme devient : `while u < 14 :` Les deux versions renvoient le même résultat, de toutes façons, car aucun terme de la suite n'est égal à 14.

L'appel `seuil()` renvoie ici 18, car $u_{17} \approx 13{,}8$ et $u_{18} \approx 14{,}1$. Il faudra donc 18 ans pour que la posidonie recouvre une surface dépassant les 14 hectares.

Partie B - Étude d'un modèle continu

♦ **BAC.2 (Amérique du Nord, J1 2025)** On considère la suite numérique (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}.$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1) Calculer le terme u_1.

2) On définit la suite (a_n) pour tout entier naturel n, par :

$$a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}.$$

On admet que la suite (a_n) est bien définie.

a) Calculer a_0 et a_1.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$a_n \geqslant 3n - 1.$$

d) En déduire la limite de la suite (a_n).

3) On souhaite étudier la limite de la suite (u_n).

a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{a_n}{a_n - 1}$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

4) On admet que la suite (u_n) est décroissante.
On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```python
def algo(p):
    u=2
    n=0
    while u-1>p:
        u=(2*u+1)/(u+2)
        n=n+1
    return (n,u)
```

a) Interpréter les valeurs `n` et `u` renvoyées par l'appel de la fonction `algo(p)` dans le contexte de l'exercice.

b) Donner, sans justifier, la valeur de n pour $p = 0{,}001$.

☞ **Correction exercice 2 :** Pour cet exercice, on admet que les deux suites (a_n) et (u_n) sont bien définies, ce qui équivaut à admettre que les termes de la suite (u_n) sont tous différents de -2 (pour que la suite (u_n) soit bien définie) et de 1 (pour que (a_n) soit bien définie).

1) On a : $u_1 = \dfrac{2u_0+1}{u_0+2} = \dfrac{2\times 2+1}{2+2} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$.

2) a) On a : $a_0 = \dfrac{u_0}{u_0-1} = \dfrac{2}{2-1} = 2$

et $a_1 = \dfrac{u_1}{u_1-1} = \dfrac{1{,}25}{1{,}25-1} = \dfrac{1{,}25}{0{,}25} = 5$.

b) Soit n un entier naturel.

On a, d'une part : $$a_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1} = \frac{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}-1} = \frac{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}-\dfrac{u_n+2}{u_n+2}}$$
$$= \frac{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}}{\dfrac{2u_n+1-u_n-2}{u_n+2}} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}\times\frac{u_n+2}{u_n-1}$$
$$= \frac{2u_n+1}{u_n-1}$$

et, d'autre part : $$3a_n - 1 = 3\times\frac{u_n}{u_n-1} - 1 = \frac{3u_n}{u_n-1} - \frac{u_n-1}{u_n-1} = \frac{3u_n-(u_n-1)}{u_n-1}$$
$$= \frac{2u_n+1}{u_n-1}$$

On constate donc bien que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

Autre méthode :

Soit n un entier naturel.

$$a_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1} = \frac{u_{n+1}-1+1}{u_{n+1}-1} = 1 + \frac{1}{u_{n+1}-1}$$
$$= 1 + \frac{1}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}-1} = 1 + \frac{1}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}-\dfrac{u_n+2}{u_n+2}}$$
$$= 1 + \frac{1}{\dfrac{u_n-1}{u_n+2}} = 1 + \frac{u_n+2}{u_n-1}$$
$$= 2 + \frac{u_n+2}{u_n-1} - 1 = \frac{2(u_n-1)+u_n+2}{u_n-1} - 1$$
$$= \frac{2u_n-2+u_n+2}{u_n-1} - 1$$
$$= \frac{3u_n}{u_n-1} - 1 = 3\frac{u_n}{u_n-1} - 1$$
$$= 3a_n - 1$$

c) Posons, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, l'affirmation P_n :

« $a_n \geqslant 3n-1$ ».

Initialisation : On a calculé $a_1 = 5$ et donc on a bien $5 \geqslant 3\times 1 - 1 = 2$.

L'affirmation P_1 est donc vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul. On suppose que l'affirmation P_n est vraie, c'est-à-dire que $a_n \geqslant 3n-1$.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned}
a_n \geqslant 3n-1 &\implies 3a_n \geqslant 3(3n-1) \quad \text{car } 3>0\\
&\implies 3a_n - 1 \geqslant 9n-3-1\\
&\implies a_{n+1} \geqslant 9n-4 \quad \text{d'après la question } \mathbf{2.\ b.}\ 3a_n-1 = a_{n+1}\\
&\implies a_{n+1} \geqslant 3n+6n+3-7\\
&\implies a_{n+1} \geqslant 3(n+1)+6n-7\\
&\implies a_{n+1} \geqslant 3(n+1)-1+6n-6\\
&\implies a_{n+1} \geqslant 3(n+1)-1+6(n-1)\\
&\implies a_{n+1} \geqslant 3(n+1)-1 \quad \text{car } 6(n-1)\geqslant 0
\end{aligned}$$

Si, pour un entier n naturel non nul (ce qui garantit $(n-1)\geqslant 0$), P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie également.

Conclusion : L'affirmation P_1 est vraie, et, pour tout entier naturel non nul n, la véracité de l'affirmation est héréditaire : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier naturel non nul n, on a : $a_n \geqslant 3n-1$.

d) Comme $3>0$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n-1 = +\infty$.

Par comparaison, puisque pour tout n non nul, on a $a_n \geqslant 3n-1$, on en déduit que la suite (a_n) diverge vers $+\infty$.

3) a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} a_n = \frac{u_n}{u_n - 1} &\iff a_n \times (u_n - 1) = u_n \quad \text{car } u_n - 1 \neq 0 \\ &\iff a_n \times u_n - a_n - u_n = 0 \\ &\iff (a_n - 1) \times u_n - a_n = 0 \\ &\iff (a_n - 1) \times u_n = a_n \\ &\iff u_n = \frac{a_n}{a_n - 1} \end{aligned}$$

Pour la dernière étape, la division par $a_n - 1$ est légitime, puisque a_n est un quotient de deux nombres différents, car le dénominateur est égal au numérateur moins 1, donc a_n ne peut pas être égal à 1, donc $a_n - 1$ est non nul.
Ainsi, on a bien exprimé u_n en fonction de a_n avec la relation annoncée dans la question.

b) Avec les questions **2. a.** on a $a_0 = 2$ et avec **2. c.**, pour n naturel non nul, on a $a_n \geqslant 3n - 1 > 0$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, a_n est non nul.
On déduit donc de la question précédente que, pour tout n naturel, on a : $u_n = \dfrac{a_n}{a_n - 1} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{a_n}}$.
Enfin, puisque (a_n) diverge vers $+\infty$, par limite du quotient, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$,
puis, par limite de la somme $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{a_n} = 1$,
enfin, par limite du quotient : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{a_n}} = 1$.
La suite (u_n) converge donc vers 1.

4) Puisqu'on admet que la suite (u_n) est décroissante, cela signifie que la suite est minorée par sa limite et donc que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 1$ donc $u_n - 1 \geqslant 0$.

a) Cette fonction python initialise la variable `u` à 2, ce qui est la valeur de u_0 et la variable `n` à 0, ce qui est l'indice correspondant.
Puis, à chaque exécution de la boucle `while`, `u` se voit affecter le terme suivant dans la suite (u_n) et `n` se voit affecter l'entier suivant, donc l'indice correspondant au terme dont la valeur est stockée dans la variable `u`.
Cette boucle `while` tourne tant que l'écart entre le terme stocké dans la variable `u` et la limite 1 est strictement supérieur à la valeur `p`, qui est l'argument choisi pour invoquer la fonction.
Les valeurs `n` et `u` renvoyées par l'appel de la fonction `algo(p)` correspondent donc respectivement à l'indice et à la valeur du premier terme de la suite pour lequel l'écart entre le terme et la limite de la suite est inférieur ou égal à la valeur `p` choisie.

b) On parcourt la suite à la calculatrice, et on constate que $u_5 \approx 1{,}002\,7$, donc $u_5 - 1 > 0{,}001$ et $u_6 \approx 1{,}000\,9$, donc $u_6 - 1 \leqslant 0{,}001$.
La valeur de n pour $p = 0{,}001$ est donc 6 (et la valeur renvoyée pour `u` est donc une valeur approchée de u_6).
On peut aussi programmer la fonction python sur la calculatrice et faire l'appel `algo(0.001)`, qui renvoie `(6, 1,000 914 913 083 257)`

♦ **BAC.3** (**Amérique de Nord, J2 secours 2025**) L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n. \end{cases}$$

Partie A - Conjecture

1) Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			

2) Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Partie B - Étude d'une suite auxiliaire

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

1) Calculer w_0.

2) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3) Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n.

4) Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n.$$

5) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\quad u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Partie C - Étude de la suite (u_n)

1) Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.

2) En déduire que la suite (u_n) est convergente sans chercher à calculer la valeur de la limite.

3) On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell$.
Déterminer la limite de la suite (u_n).

☞ **Correction exercice 3 :**

Partie A - Conjecture

1) Voici le tableau complété (on peut calculer rapidement les termes à la main, puis vérifier à la calculatrice) :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{32}$

2) Par exploration à la calculatrice, les termes de la suite semblent décroitrent, tout en restant strictement positifs, on a $u_{100} \approx 8 \times 10^{-29}$, et $u_{1000} \approx 9 \times 10^{-299}$.
On suppose que la suite converge vers 0.

Partie B - Étude d'une suite auxiliaire

1) On a : $w_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2}$.

2) On va établir la relation de récurrence de (w_n). Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
w_{n+1} &= u_{(n+1)+1} - \frac{1}{2}u_{(n+1)} \quad \text{en appliquant la définition de } w \text{ au rang } (n+1)\\
&= u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1}\\
&= \left(u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right) - \frac{1}{2}u_{n+1} \quad \text{en appliquant la relation de récurrence de } u.\\
&= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\\
&= \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right)\\
&= \frac{1}{2}w_n \quad \text{en appliquant la définition de } w \text{ au rang } n
\end{aligned}$$

Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n$.

Cette relation de récurrence établit que (w_n) est une suite géométrique, de raison $q = \frac{1}{2}$, et de premier terme $w_0 = \frac{1}{2}$.

3) Puisque la suite est géométrique, on a la propriété classique :

$\forall n \in \mathbf{N}, \quad w_n = w_0 \times q^n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

4) Soit n un entier naturel. On reprend la définition de (w_n) :

$$\begin{aligned}
w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n &\iff \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \quad \text{d'après l'expression explicite de } w_n\\
&\iff u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n
\end{aligned}$$

On arrive bien à la relation de récurrence demandée.

5) Pour tout n entier naturel, on pose : P_n l'affirmation : « $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ».

Initialisation : On a d'une part $u_0 = 0$ et, d'autre part : $0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0 \times 1 = 0$.
L'affirmation est donc vraie au rang 0.

Hérédité : Pour un entier naturel n donné, on suppose que la propriété P_n est vraie, c'est-à-dire : $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$\begin{aligned}
\text{On a : } u_{n+1} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n \quad \text{d'après la relation de récurrence de la question } \mathbf{B.\ 4}\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} \times n\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{par hypothèse de récurrence}\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (1+n)\\
u_{n+1} &= (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{c'est l'affirmation } P_{n+1}
\end{aligned}$$

Conclusion : L'affirmation P_0 est vraie, et, pour tout entier naturel n, la véracité de l'affirmation P_n est héréditaire, donc, par principe de récurrence :

$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Partie C - Étude de la suite (u_n)

1) Soit n un entier naturel non nul, donc supérieur ou égal à 1 :

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \quad \text{d'après la question } \textbf{B. 5.}\\
&= (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times 2\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times ((n+1) - 2n)\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (1-n)
\end{aligned}
$$

La différence $u_{n+1} - u_n$ est égale au produit de deux nombres de signe contraire, car, pour n entier naturel supérieur ou égal à 1 :

- $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ est positif strictement ;
- $(1-n)$ est négatif ou nul

La différence $u_{n+1} - u_n$ est donc négative ou nulle pour tout n supérieur ou égal à 1, on en déduit donc que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.

2) L'expression du terme général de la suite (u_n) permet d'affirmer que la suite est minorée par 0, car chaque terme est le produit de n, entier naturel, donc positif et de $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$, strictement positif, car $\frac{1}{2}$ est strictement positif.
De plus, la suite est décroissante, à partir du rang $n = 1$.
La suite est donc décroissante (à partir du rang $n = 1$) et minorée par 0 : on en déduit qu'elle converge, vers une limite ℓ dont on sait que $\ell \geqslant 0$.

3) On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell$.

Résolvons cette équation :

$$
\begin{aligned}
\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell &\iff \ell = \frac{3}{4}\ell\\
&\iff \ell - \frac{3}{4}\ell = 0\\
&\iff \frac{1}{4}\ell = 0\\
&\iff \ell = 0 \quad \text{car } \frac{1}{4} \neq 0
\end{aligned}
$$

L'équation ayant une unique solution, puisque la limite doit être une solution de l'équation, on a donc la limite de la suite (u_n) qui est 0, l'unique solution de l'équation.
Cela vient confirmer notre conjecture de la **partie A**.

♦ **BAC.4** **(Asie, J1, 2025)** Un patient doit prendre toutes les heures une dose de 2 ml d'un médicament.

On introduit la suite (u_n) telle que le terme u_n représente la quantité de médicament, exprimée en ml présente dans l'organisme immédiatement après n prises de médicament.

On a $u_1 = 2$ et

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ strictement positif : } u_{n+1} = 2 + 0{,}8u_n.$$

Partie A

En utilisant ce modèle, un médecin cherche à savoir à partir de combien de prises du médicament la quantité présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL.

1) Calculer la valeur u_2.

2) Montrer par récurrence que :

$$u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1} \text{ pour tout entier naturel } n \text{ strictement positif.}$$

3) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et et donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.

4) Soit N un entier naturel strictement positif, l'inéquation $u_N \geqslant 10$ admet-elle des solutions ?
Interpréter le résultat de cette question dans le contexte de l'exercice.

5) *Répondre à cette question uniquement avec la calculatrice, pour l'instant.*
Déterminer à partir de combien de prises de médicament la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL. Justifier votre démarche.

Partie B

En utilisant la même modélisation, le médecin s'intéresse à la quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du malade au cours du temps.

On définit pour cela la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n strictement positif par

$$S_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

On admet que la suite (S_n) est croissante.

1) Calculer S_2.

2) Montrer que pour tout entier naturel n strictement positif,

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0{,}8^n.$$

3) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

4) On donne la fonction `mystere` suivante, écrite en langage Python :

```python
def mystere(k):
    n = 1
    s = 2
    while s < k:
        n = n + 1
        s = 10 - 40/n + (40*0.8**n)/n
    return n
```

Dans le contexte de l'énoncé, que représente la valeur renvoyée par la saisie `mystere(9)` ?

5) Justifier que cette valeur est strictement supérieure à 10.

☞ **Correction exercice 4 :**

Partie A

1) On a : $u_2 = 2 + 0{,}8u_1 = 2 + 0{,}8 \times 2 = 2 + 1{,}6 = 3{,}6$.
Après deux prises du médicament, le patient a 3,6 mL de médicament dans son organisme.

2) Pour tout entier naturel non nul n, on pose P_n, l'affirmation : « $u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}$ ».
Initialisation : On a, d'une part : $u_1 = 2$, d'après l'énoncé.
Et, d'autre part : $10 - 8 \times 0{,}8^{1-1} = 10 - 8 \times 0{,}8^0 = 10 - 8 \times 1 = 2$.
On constate que pour $n = 1$, l'affirmation P_1 est vraie.
Hérédité : Pour n entier naturel non nul, on suppose l'affirmation P_n vraie, c'est-à-dire : « $u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}$ ».
On veut montrer que cela implique que l'affirmation P_{n+1} est vraie.
On a : $u_{n+1} = 2 + 0{,}8u_n$ par définition de la suite (u_n)

$$\begin{aligned} &= 2 + 0{,}8\left(10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}\right) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 2 + 0{,}8 \times 10 - 0{,}8 \times 8 \times 0{,}8^{n-1} \\ &= 2 + 8 - 8 \times 0{,}8 \times 0{,}8^{n-1} \\ &= 10 - 8 \times 0{,}8 \times 0{,}8^{n} \quad \text{c'est l'égalité } P_{n+1} \end{aligned}$$

Conclusion : L'affirmation est vraie au rang 1, et, pour tout rang naturel non nul n, si P_n est vraie alors P_{n+1} l'est aussi, donc, en vertu du principe de démonstration par récurrence, on a donc démontré que P_n- est vraie pour tout entier naturel n non nul, autrement dit, on a établi une expression explicite du terme général de la suite.

3) Par connaissance des limites des suites géométriques, comme on a $-1 < 0{,}8 < 1$, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^{n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} -8\times 0{,}8^{n-1} = 0$.
Par limite de la somme, on en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} = 10 + 0 = 10$.
La suite (u_n) converge donc vers 10.
Dans le contexte de l'exercice, cela signifie qu'au bout d'un nombre important de prises de ce médicament, l'organisme du patient contiendra une quantité de médicament qui tend vers les 10 mL.

4) Soit N un entier naturel non nul, étudions l'inéquation :

$$\begin{aligned} u_N \geqslant 10 &\iff 10 - 8 \times 0{,}8^{N-1} \geqslant 10 \\ &\iff -8 \times 0{,}8^{N-1} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Le membre de gauche est un réel strictement négatif (car 8 et 0,8 sont strictement positifs) et ne peut être supérieur ou égal à 0.
L'inéquation n'admet donc pas de solution.
Dans le contexte de l'exercice, cela peut s'interpréter sur le comportement de la suite, qui est donc majorée (strictement) par 10, ou par la quantité de médicament dans l'organisme de l'individu qui est toujours strictement inférieure à 10 mL, quel que soit le nombre de prises du médicament enchaînées.

5) On résout une inéquation différente, avec n un entier naturel non nul :

$$\begin{aligned} u_n > 9 &\iff 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1} > 9 \\ &\iff -8 \times 0{,}8^{n-1} > -1 \\ &\iff 0{,}8^{n-1} < \frac{1}{8} \quad \text{car } -8 < 0 \\ &\iff \ln\left(0{,}8^{n-1}\right) < \ln\left(\frac{1}{8}\right) \quad \text{la fonction ln étant strictement croissante sur } \mathbf{R}^{*+} \\ &\iff (n-1)\ln(0{,}8) < -\ln(8) \quad \text{d'après les propriétés de la fonction ln} \\ &\iff n - 1 > -\frac{\ln(8)}{\ln(0{,}8)} \quad \text{car } \ln(0{,}8) < 0 \\ &\iff n > 1 - \frac{\ln(8)}{\ln(0{,}8)} \end{aligned}$$

Or, $1 - \dfrac{\ln(8)}{\ln(0{,}8)} \approx 10{,}3$.
Comme on résout pour n entier naturel non nul, les solutions sont les entiers supérieurs ou égaux à 11.
C'est à partir de 11 prises successives du médicament que la quantité de celui-ci dans l'organisme du patient dépasse strictement les 9 mL.

Partie B

1) On a $S_2 = \dfrac{u_1 + u_2}{n} = \dfrac{2 + 3{,}6}{2} = 2{,}8$.

2) Pour donner l'expression explicite de la somme, on utilisera l'expression explicite du terme général de la suite (u_n), établi à la question **A. 2.**.
La somme est une somme de n termes consécutifs, de u_1 à u_n :

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_n &= 10 - 8 \times 0{,}8^0 + 10 - 8 \times 0{,}8^1 + \cdots + 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1} \\ &= 10 + 10 + \cdots + 10 - 8 \times \left(0{,}8^0 + 0{,}8^1 + \cdots + 0{,}8^{n-1}\right) \\ &= 10 \times n - 8 \times 1 \times \frac{1 - 0{,}8^n}{1 - 0{,}8} \quad \text{formule connue} \\ &= 10n - \frac{8}{0{,}2} \times (1 - 0{,}8^n) \\ &= 10n - 40 \times (1 - 0{,}8^n) \\ &= 10n - 40 + 40 \times 0{,}8^n \quad \text{en développant} \end{aligned}$$

On arrive donc bien à l'expression annoncée.

3) On déduit de la question précédente que, pour tout n entier naturel non nul, on a : $S_n = 10 - \frac{40}{n} + \frac{40}{n} \times 0{,}8^n$.

On a donc, par limite du quotient : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{40}{n} = 0$,
de plus, par limite des suites géométriques, comme $-1 < 0{,}8 < 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}8^n = 0$.
Ainsi, par limite de la somme et du produit, on en déduit :
$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 10 - \frac{40}{n} + \frac{40}{n} \times 0{,}8^n = 10$.
La quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du patient tend elle aussi vers 10 mL.

4) La fonction mystère est une fonction de seuil : elle détermine l'indice seuil pour lequel la valeur de S_n franchit le seuil `k` pour la première fois.

`mystere(9)` renvoie donc le premier nombre entier naturel non nul n pour lequel la quantité moyenne de médicament dans l'organisme du patient depuis le début de la prise devient supérieure ou égale à 9 mL.

5) Cette valeur est donc nécessairement strictement supérieure à 10, puisque l'on a établi à la fin de la **partie A** que c'est seulement à la onzième prise du médicament que la quantité **à ce moment là** dans le corps du patient dépasse les 9 mL.
Avant $n = 11$, les valeurs de la suite (u_n) sont donc toutes inférieures strictement à 9, et donc leur moyenne le sera aussi.
Il est donc impossible que S_n soit supérieur à 9 pour tout entier naturel non nul n, pour n inférieur ou égal à 10.
La fonction `mystère` doit donc renvoyer une valeur (un indice) strictement supérieur à 10. Elle renverra en réalité 40 (on a $S_{39} \approx 9{,}97$ et $S_{40} \approx 9{,}000\,1$).