Corrections

Terminale G

S. Dubard

Lycée Ella Fitzgerald

23 septembre 2025

Sommaire

SN.27 Déterminer les limites des suites de terme général suivants :

- $a_n = \dfrac{\sqrt{n} + \cos(n)}{n^2 + n + 1}$;

♦ **SN.27** Déterminer les limites des suites de terme général suivants :

- $a_n = \dfrac{\sqrt{n} + \cos(n)}{n^2 + n + 1}$;

☞ **Correction exercice 27 :** Pour tout entier naturel n , $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$, ainsi :

♦ **SN.27** Déterminer les limites des suites de terme général suivants :

- $a_n = \dfrac{\sqrt{n} + \cos(n)}{n^2 + n + 1}$;

☞ **Correction exercice 27 :** Pour tout entier naturel n , $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$, ainsi :

$$\frac{\sqrt{n} - 1}{n^2 + n + 1} \leqslant \frac{\sqrt{n} + \cos(n)}{n^2 + n + 1} \leqslant \frac{\sqrt{n} + 1}{n^2 + n + 1}$$

(car $n^2 + n + 1$ est toujours strictement positif si $n \in \mathbf{N}$!).

♦ **SN.27** Déterminer les limites des suites de terme général suivants :

- $a_n = \dfrac{\sqrt{n} + \cos(n)}{n^2 + n + 1}$;

☞ **Correction exercice 27 :** Pour tout entier naturel n , $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$, ainsi :

$$\frac{\sqrt{n} - 1}{n^2 + n + 1} \leqslant \frac{\sqrt{n} + \cos(n)}{n^2 + n + 1} \leqslant \frac{\sqrt{n} + 1}{n^2 + n + 1}$$

(car $n^2 + n + 1$ est toujours strictement positif si $n \in \mathbf{N}$!).
De plus :

$$\frac{\sqrt{n} + 1}{n^2 + n + 1} = \frac{\sqrt{n}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n^2\left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n\sqrt{n}} \times \frac{1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}$$

$$\frac{\sqrt{n} - 1}{n^2 + n + 1} = \frac{\sqrt{n}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n^2\left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n\sqrt{n}} \times \frac{1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}$$

♦ **SN.27** Déterminer les limites des suites de terme général suivants :

- $a_n = \dfrac{\sqrt{n} + \cos(n)}{n^2 + n + 1}$;

☞ **Correction exercice 27 :** Pour tout entier naturel n , $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$, ainsi :

$$\frac{\sqrt{n} - 1}{n^2 + n + 1} \leqslant \frac{\sqrt{n} + \cos(n)}{n^2 + n + 1} \leqslant \frac{\sqrt{n} + 1}{n^2 + n + 1}$$

(car $n^2 + n + 1$ est toujours strictement positif si $n \in \mathbf{N}$!).
De plus :

$$\frac{\sqrt{n} + 1}{n^2 + n + 1} = \frac{\sqrt{n}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n^2\left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n\sqrt{n}} \times \frac{1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}$$

$$\frac{\sqrt{n} - 1}{n^2 + n + 1} = \frac{\sqrt{n}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n^2\left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n\sqrt{n}} \times \frac{1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 1 \pm \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}} = 0$, donc finalement :

☞ **Correction exercice 27 :**

$$\underbrace{\frac{\sqrt{n}-1}{n^2+n+1}}_{\text{tend vers } 0} \leqslant \frac{\sqrt{n}+\cos(n)}{n^2+n+1} \leqslant \underbrace{\frac{\sqrt{n}+1}{n^2+n+1}}_{\text{tend vers } 0}.$$

☞ **Correction exercice 27 :**

$$\underbrace{\frac{\sqrt{n}-1}{n^2+n+1}}_{\text{tend vers } 0} \leqslant \frac{\sqrt{n}+\cos(n)}{n^2+n+1} \leqslant \underbrace{\frac{\sqrt{n}+1}{n^2+n+1}}_{\text{tend vers } 0}.$$

Le théorème des gendarmes nous permet donc de conclure que (a_n) tend vers 0.

- $b_n = n^5 + \sqrt{\dfrac{n+1}{1+n^2}} - 10\,;$

☞ **Correction exercice 27 :** Ici, point d'inégalités, il suffit de regarder chaque terme :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^5 = +\infty\,;$

- $b_n = n^5 + \sqrt{\dfrac{n+1}{1+n^2}} - 10$;

☞ **Correction exercice 27 :** Ici, point d'inégalités, il suffit de regarder chaque terme :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^5 = +\infty$;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{\dfrac{n+1}{1+n^2}}$ eh bien... il va falloir la calculer, **si cette limite existe** !

- $b_n = n^5 + \sqrt{\dfrac{n+1}{1+n^2}} - 10\,;$

☞ **Correction exercice 27 :** Ici, point d'inégalités, il suffit de regarder chaque terme :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^5 = +\infty\,;$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{n+1}{1+n^2}}$ eh bien... il va falloir la calculer, **si cette limite existe** !
- $\lim\limits_{n\to+\infty} -10 = -10\,;$

☞ **Correction exercice 27 :** Pour tout entier naturel n non nul :

☞ **Correction exercice 27 :** Pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{1+n^2} &= \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}\\ &= \frac{1+\frac{1}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}\end{aligned}$$

☞ **Correction exercice 27 :** Pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{1+n^2} &= \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}\\ &= \frac{1+\frac{1}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}\end{aligned}$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1,$

☞ **Correction exercice 27 :** Pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{1+n^2} &= \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} \\ &= \frac{1+\frac{1}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}\end{aligned}$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) = +\infty$ donc...

☞ **Correction exercice 27 :** Pour tout entier naturel n non nul :

$$\frac{n+1}{1+n^2} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$$

Or : $\lim_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1$, $\lim_{n\to+\infty} n\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) = +\infty$ donc...
$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{1+n^2} = 0$, puis $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{n+1}{1+n^2}} = 0$.

Ainsi :

☞ **Correction exercice 27 :** Pour tout entier naturel n non nul :

$$\frac{n+1}{1+n^2} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) = +\infty$ donc...

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{1+n^2} = 0$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{n+1}{1+n^2}} = 0$.

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^5 + \sqrt{\dfrac{n+1}{1+n^2}} - 10 = +\infty$.

- $c_n = \dfrac{3n^2 + 5}{2n}$;

- $c_n = \dfrac{3n^2+5}{2n}$;

☞ **Correction exercice 27 :** Même histoire que précédemment, pour tout entier naturel n non nul :

- $c_n = \dfrac{3n^2+5}{2n}$;

☞ **Correction exercice 27 :** Même histoire que précédemment, pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned}\frac{3n^2+5}{2n} &= \frac{n^2\left(3+\frac{5}{n^2}\right)}{2n}\\ &= \frac{n\left(3+\frac{5}{n^2}\right)}{2}\end{aligned}$$

- $c_n = \dfrac{3n^2+5}{2n}$;

☞ **Correction exercice 27 :** Même histoire que précédemment, pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned}\frac{3n^2+5}{2n} &= \frac{n^2\left(3+\frac{5}{n^2}\right)}{2n}\\ &= \frac{n\left(3+\frac{5}{n^2}\right)}{2}\end{aligned}$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(3+\dfrac{5}{n^2}\right) = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2$ donc...

- $c_n = \dfrac{3n^2+5}{2n}$;

☞ **Correction exercice 27 :** Même histoire que précédemment, pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned}\frac{3n^2+5}{2n} &= \frac{n^2\left(3+\frac{5}{n^2}\right)}{2n}\\ &= \frac{n\left(3+\frac{5}{n^2}\right)}{2}\end{aligned}$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(3+\dfrac{5}{n^2}\right) = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 = 2$ donc...
$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty$.

- $d_n = \dfrac{1 - w_n}{2 - w_n}$ où la suite (w_n) vérifie :
  - $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 2\,;$
  - $\forall n \in \mathbf{N}, \quad w_n > 2.$

- $d_n = \dfrac{1 - w_n}{2 - w_n}$ où la suite (w_n) vérifie :
  - $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 2$;
  - $\forall n \in \mathbf{N}, \quad w_n > 2$.

☞ **Correction exercice 27 :** On regarde chaque facteur séparément :

- $1 - w_n$ va tendre vers $1 - 2 = -1$;

- $d_n = \dfrac{1 - w_n}{2 - w_n}$ où la suite (w_n) vérifie :
  - $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 2$;
  - $\forall n \in \mathbf{N}, \quad w_n > 2.$

☞ **Correction exercice 27 :** On regarde chaque facteur séparément :

- $1 - w_n$ va tendre vers $1 - 2 = -1$;
- $2 - w_n$ va tendre vers 0.

- $d_n = \dfrac{1 - w_n}{2 - w_n}$ où la suite (w_n) vérifie :
  - $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 2$;
  - $\forall n \in \mathbf{N}, \quad w_n > 2$.

☞ **Correction exercice 27 :** On regarde chaque facteur séparément :

- $1 - w_n$ va tendre vers $1 - 2 = -1$;
- $2 - w_n$ va tendre vers 0.

- $d_n = \dfrac{1 - w_n}{2 - w_n}$ où la suite (w_n) vérifie :
  - $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 2$;
  - $\forall n \in \mathbf{N}, \quad w_n > 2.$

☞ **Correction exercice 27 :** On regarde chaque facteur séparément :

- $1 - w_n$ va tendre vers $1 - 2 = -1$;
- $2 - w_n$ va tendre vers 0.

C'est donc du cours : il faut connaître le signe de $2 - w_n$ et $1 - w_n$.
Or, puisque $1 - w_n$ tend vers -1, il est négatif à partir d'un certain rang.
De plus, l'énoncé nous dit que $\forall n \in \mathbf{N}, \quad w_n > 2$, donc
$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 2 - w_n < 0.$

- $d_n = \dfrac{1-w_n}{2-w_n}$ où la suite (w_n) vérifie :
  - $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2$;
  - $\forall n \in \mathbf{N}, \quad w_n > 2$.

☞ **Correction exercice 27 :** On regarde chaque facteur séparément :

- $1-w_n$ va tendre vers $1-2=-1$;
- $2-w_n$ va tendre vers 0.

C'est donc du cours : il faut connaître le signe de $2-w_n$ et $1-w_n$.
Or, puisque $1-w_n$ tend vers -1, il est négatif à partir d'un certain rang.
De plus, l'énoncé nous dit que $\forall n \in \mathbf{N}, \quad w_n > 2$, donc
$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 2-w_n < 0$.
Le quotient est donc *positif* à partir d'un certain rang, donc finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} d_n = +\infty.$$

Sommaire

SN.28 Déterminer les limites des suites de terme général suivants :

- $a_n = \dfrac{\sin(n^2+n) - 5\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+2}$;

♦ **SN.28** Déterminer les limites des suites de terme général suivants :

- $a_n = \dfrac{\sin(n^2+n) - 5\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+2}$;

☞ **Correction exercice 28 :** C'est la même histoire que l'exercice précédent : on encadre le sinus puis on utilisera le théorème des gendarmes :

♦ **SN.28** Déterminer les limites des suites de terme général suivants :

- $a_n = \dfrac{\sin(n^2+n) - 5\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+2}$;

☞ **Correction exercice 28 :** C'est la même histoire que l'exercice précédent : on encadre le sinus puis on utilisera le théorème des gendarmes :
Pour tout entier naturel n , $-1 \leqslant \sin(n^2+n) \leqslant 1$, ainsi :

$$\frac{-1-5\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+2} \leqslant \frac{\sin(n^2+n)-5\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+2} \leqslant \frac{1-5\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+2}.$$

(car $2\sqrt{n}+2$ est toujours strictement positif si $n \in \mathbf{N}$!).

♦ **SN.28** Déterminer les limites des suites de terme général suivants :

- $a_n = \dfrac{\sin(n^2+n) - 5\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+2}$;

☞ **Correction exercice 28 :** C'est la même histoire que l'exercice précédent : on encadre le sinus puis on utilisera le théorème des gendarmes :
Pour tout entier naturel n , $-1 \leqslant \sin(n^2+n) \leqslant 1$, ainsi :

$$\frac{-1-5\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+2} \leqslant \frac{\sin(n^2+n)-5\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+2} \leqslant \frac{1-5\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+2}.$$

(car $2\sqrt{n}+2$ est toujours strictement positif si $n \in \mathbf{N}$!).
On factorise ensuite pour comprendre ce qui se passe dans les termes de gauche et de droite :

$$\frac{-1-5\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+2} = \frac{\sqrt{n}\left(-5-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(2+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{-5-\frac{1}{\sqrt{n}}}{2+\frac{2}{\sqrt{n}}}$$

$$\frac{1-5\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+2} = \frac{\sqrt{n}\left(-5+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(2+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{-5+\frac{1}{\sqrt{n}}}{2+\frac{2}{\sqrt{n}}}$$

♦ **SN.28** Déterminer les limites des suites de terme général suivants :

▶ $a_n = \dfrac{\sin(n^2+n) - 5\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+2}$;

☞ **Correction exercice 28 :** C'est la même histoire que l'exercice précédent : on encadre le sinus puis on utilisera le théorème des gendarmes :
Pour tout entier naturel n , $-1 \leqslant \sin(n^2+n) \leqslant 1$, ainsi :

$$\frac{-1-5\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+2} \leqslant \frac{\sin(n^2+n)-5\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+2} \leqslant \frac{1-5\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+2}.$$

(car $2\sqrt{n}+2$ est toujours strictement positif si $n \in \mathbf{N}$!).
On factorise ensuite pour comprendre ce qui se passe dans les termes de gauche et de droite :

$$\frac{-1-5\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+2} = \frac{\sqrt{n}\left(-5-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(2+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{-5-\frac{1}{\sqrt{n}}}{2+\frac{2}{\sqrt{n}}}$$

$$\frac{1-5\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+2} = \frac{\sqrt{n}\left(-5+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(2+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{-5+\frac{1}{\sqrt{n}}}{2+\frac{2}{\sqrt{n}}}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} -5 \pm \dfrac{1}{\sqrt{n}} = -5$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\dfrac{2}{\sqrt{n}} = 2$, donc finalement :

☞ **Correction exercice 28 :**

$$\underbrace{\frac{-1-5\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+2}}_{\text{tend vers } -5/2} \leqslant \frac{\sin(n^2+n)-5\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+2} \leqslant \underbrace{\frac{1-5\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+2}}_{\text{tend vers } -5/2}.$$

☞ **Correction exercice 28 :**

$$\underbrace{\frac{-1-5\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+2}}_{\text{tend vers } -5/2} \leqslant \frac{\sin(n^2+n)-5\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+2} \leqslant \underbrace{\frac{1-5\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+2}}_{\text{tend vers } -5/2}.$$

Le théorème des gendarmes nous permet donc de conclure que : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\dfrac{5}{2}$.

- $b_n = n^3 - \sqrt{\dfrac{n^2+1}{n+n^3}} - 5\,;$

☞ **Correction exercice 28 :** Ici, pas d'inégalités, on regarde chaque terme :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = +\infty\,;$

- $b_n = n^3 - \sqrt{\dfrac{n^2+1}{n+n^3}} - 5$;

☞ **Correction exercice 28 :** Ici, pas d'inégalités, on regarde chaque terme :

- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 = +\infty$;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{\dfrac{n^2+1}{n+n^3}}$ eh bien... il va falloir la calculer, **si cette limite existe** !

- $b_n = n^3 - \sqrt{\dfrac{n^2+1}{n+n^3}} - 5$;

☞ **Correction exercice 28 :** Ici, pas d'inégalités, on regarde chaque terme :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{n^2+1}{n+n^3}}$ eh bien... il va falloir la calculer, **si cette limite existe** !
- $\lim\limits_{n\to+\infty} -5 = -5$;

☞ **Correction exercice 28 :** Pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned}\frac{n^2+1}{n+n^3} &= \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} \\ &= \frac{1+\frac{1}{n^2}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} \\ &= \frac{1}{n}\end{aligned}$$

☞ **Correction exercice 28 :** Pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned}\frac{n^2+1}{n+n^3} &= \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}\\ &= \frac{1+\frac{1}{n^2}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}\\ &= \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Remarquons qu'ici, ça se factorise vraiment bien !

☞ **Correction exercice 28 :** Pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned}\frac{n^2+1}{n+n^3} &= \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}\\ &= \frac{1+\frac{1}{n^2}}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}\\ &= \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Remarquons qu'ici, ça se factorise vraiment bien !

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\dfrac{n^2+1}{n+n^3}}=0$, ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3-\sqrt{\dfrac{n^2+1}{n+n^3}}-5=+\infty$.

- $c_n = \dfrac{3n^3 + 4n^2}{8n^3}$;

☞ **Correction exercice 28 :** On factorise, encore...

- $c_n = \dfrac{3n^3 + 4n^2}{8n^3}$;

☞ **Correction exercice 28 :** On factorise, encore...

$$\begin{aligned}\frac{3n^3 + 4n^2}{8n^3} &= \frac{n^3\left(3 + \frac{4}{n}\right)}{n^3 \times 8} \\ &= \frac{3 + \frac{4}{n}}{8}\end{aligned}$$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 + \dfrac{4}{n} = 3$;

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = \dfrac{3}{8}$.

- $c_n = \dfrac{3n^3 + 4n^2}{8n^3}$;

☞ **Correction exercice 28 :** On factorise, encore...

$$\begin{aligned}\frac{3n^3 + 4n^2}{8n^3} &= \frac{n^3\left(3 + \frac{4}{n}\right)}{n^3 \times 8} \\ &= \frac{3 + \frac{4}{n}}{8}\end{aligned}$$

- $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 3 + \frac{4}{n} = 3$;
- $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 8 = 8$;

Donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} c_n = \frac{3}{8}$.

- $d_n = \dfrac{1 - u_n}{u_n + 5}$ où la suite (u_n) vérifie :
  - $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -5$;
  - $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n > -5.$

☞ **Correction exercice 28 :** Allez, on regarde...

- $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - u_n = 6$;

On doit donc étudier le signe de $u_n + 5$ puisque $1 - u_n$ sera positif à partir d'un certain rang.

- $d_n = \dfrac{1-u_n}{u_n+5}$ où la suite (u_n) vérifie :
  - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -5\,;$
  - $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n > -5.$

☞ **Correction exercice 28 :** Allez, on regarde...

- $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - u_n = 6\,;$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + 5 = 0.$

On doit donc étudier le signe de $u_n + 5$ puisque $1 - u_n$ sera positif à partir d'un certain rang.

- $d_n = \dfrac{1-u_n}{u_n+5}$ où la suite (u_n) vérifie :
  - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -5\,;$
  - $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n > -5.$

☞ **Correction exercice 28 :** Allez, on regarde...

- $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - u_n = 6\,;$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + 5 = 0.$

On doit donc étudier le signe de $u_n + 5$ puisque $1 - u_n$ sera positif à partir d'un certain rang.

- $d_n = \dfrac{1-u_n}{u_n+5}$ où la suite (u_n) vérifie :
  - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -5\,;$
  - $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n > -5.$

☞ **Correction exercice 28 :** Allez, on regarde...

- $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-u_n = 6\,;$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+5 = 0.$

On doit donc étudier le signe de u_n+5 puisque $1-u_n$ sera positif à partir d'un certain rang.
Or $u_n+5>0$ d'après l'énoncé donc le quotient est positif à partir d'un certain rang. Ainsi,

- $d_n = \dfrac{1-u_n}{u_n+5}$ où la suite (u_n) vérifie :
  - $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -5\,;$
  - $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n > -5.$

☞ **Correction exercice 28 :** Allez, on regarde...

- $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-u_n = 6\,;$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+5 = 0.$

On doit donc étudier le signe de u_n+5 puisque $1-u_n$ sera positif à partir d'un certain rang.
Or $u_n+5>0$ d'après l'énoncé donc le quotient est positif à partir d'un certain rang. Ainsi,
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-u_n}{u_n+5} = +\infty.$

Sommaire

♦ **SN.32** James Bond joue au poker contre LeChiffre, malfrat international qui utilise ses gains pour ses riches clients.
Lors d'une « main » dans cette partie de poker, James est seul face à LeChiffre, les autres joueurs ayant trop peur de perdre leur argent face à ce redoutable adversaire.
James et LeChiffre jouent de la façon suivante :

- James débute la main en misant 200 euros, c'est la première mise ;
- LeChiffre décide de faire une « relance » en misant 2 fois cette somme, plus 150 euros (pour tenter d'intimider James) ; c'est la deuxième mise ;
- James décide alors de faire sa première relance en misant 2 fois la somme que vient de déposer LeChiffre dans le pot, plus 150 euros ; c'est la troisième mise ;
- Et ils poursuivent ainsi de suite.

Pour un entier naturel n non nul, on note u_n la $n-$ième mise de cette main. Ainsi, $u_1 = 200$.

1. Quelle est la valeur de u_2 ? De u_3 ?

Pour un entier naturel n non nul, on note u_n la $n-$ième mise de cette main. Ainsi, $u_1 = 200$.

1. Quelle est la valeur de u_2 ? De u_3 ?

☞ **Correction exercice 32 :** $u_2 = 550$ et $u_3 = 1250$.

2. (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?

Pour un entier naturel n non nul, on note u_n la $n-$ième mise de cette main. Ainsi, $u_1 = 200$.

1. Quelle est la valeur de u_2 ? De u_3 ?

☞ **Correction exercice 32 :** $u_2 = 550$ et $u_3 = 1250$.

2. (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?

☞ **Correction exercice 32 :** $u_2 - u_1 = 550 - 200 = 350$ et

Pour un entier naturel n non nul, on note u_n la $n-$ième mise de cette main. Ainsi, $u_1 = 200$.

1. Quelle est la valeur de u_2 ? De u_3 ?

☞ **Correction exercice 32 :** $u_2 = 550$ et $u_3 = 1250$.

2. (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?

☞ **Correction exercice 32 :** $u_2 - u_1 = 550 - 200 = 350$ et $u_3 - u_2 = 1250 - 550 = 700$ donc

Pour un entier naturel n non nul, on note u_n la $n-$ième mise de cette main. Ainsi, $u_1 = 200$.

1. Quelle est la valeur de u_2 ? De u_3 ?

☞ **Correction exercice 32 :** $u_2 = 550$ et $u_3 = 1250$.

2. (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?

☞ **Correction exercice 32 :** $u_2 - u_1 = 550 - 200 = 350$ et $u_3 - u_2 = 1250 - 550 = 700$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.
$\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{550}{200} = \dfrac{55}{20}$ et

Pour un entier naturel n non nul, on note u_n la $n-$ième mise de cette main. Ainsi, $u_1 = 200$.

1. Quelle est la valeur de u_2 ? De u_3 ?

☞ **Correction exercice 32 :** $u_2 = 550$ et $u_3 = 1250$.

2. (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?

☞ **Correction exercice 32 :** $u_2 - u_1 = 550 - 200 = 350$ et $u_3 - u_2 = 1250 - 550 = 700$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.
$\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{550}{200} = \dfrac{55}{20}$ et $\dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{1250}{550} = \dfrac{25}{11}$ donc

Pour un entier naturel n non nul, on note u_n la $n-$ième mise de cette main. Ainsi, $u_1 = 200$.

1. Quelle est la valeur de u_2 ? De u_3 ?

☞ **Correction exercice 32 :** $u_2 = 550$ et $u_3 = 1250$.

2. (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?

☞ **Correction exercice 32 :** $u_2 - u_1 = 550 - 200 = 350$ et $u_3 - u_2 = 1250 - 550 = 700$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.
$\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{550}{200} = \dfrac{55}{20}$ et $\dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{1250}{550} = \dfrac{25}{11}$ donc (u_n) n'est pas géométrique.

3. Expliquer pourquoi pour tout entier non nul n on a :

$$u_{n+1} = 2u_n + 150.$$

3. Expliquer pourquoi pour tout entier non nul n on a :

$$u_{n+1} = 2u_n + 150.$$

☞ **Correction exercice 32 :** C'est une simple traduction de l'énoncé : on double la mise et on rajoute 150 euros.

3. Expliquer pourquoi pour tout entier non nul n on a :

$$u_{n+1} = 2u_n + 150.$$

☞ **Correction exercice 32 :** C'est une simple traduction de l'énoncé : on double la mise et on rajoute 150 euros.

4. Compléter l'algorithme suivant pour calculer la valeur u_n pour une valeur de n donnée :

```
def mise_u(n):
    u=.....
    for i .................:
        u=.....
    return .....
```

3. Expliquer pourquoi pour tout entier non nul n on a :

$$u_{n+1} = 2u_n + 150.$$

☞ **Correction exercice 32 :** C'est une simple traduction de l'énoncé : on double la mise et on rajoute 150 euros.

4. Compléter l'algorithme suivant pour calculer la valeur u_n pour une valeur de n donnée :

```
def mise_u(n):
    u=.....
    for i .................:
        u=.....
    return .....
```

☞ **Correction exercice 32 :** À faire au tableau.

3. Expliquer pourquoi pour tout entier non nul n on a :

$$u_{n+1} = 2u_n + 150.$$

☞ **Correction exercice 32 :** C'est une simple traduction de l'énoncé : on double la mise et on rajoute 150 euros.

4. Compléter l'algorithme suivant pour calculer la valeur u_n pour une valeur de n donnée :

```
def mise_u(n):
    u=.....
    for i .................:
        u=.....
    return .....
```

☞ **Correction exercice 32 :** À faire au tableau.

5. De combien LeChiffre relance-t-il à **sa** 6ème relance ?

3. Expliquer pourquoi pour tout entier non nul n on a :

$$u_{n+1} = 2u_n + 150.$$

☞ **Correction exercice 32 :** C'est une simple traduction de l'énoncé : on double la mise et on rajoute 150 euros.

4. Compléter l'algorithme suivant pour calculer la valeur u_n pour une valeur de n donnée :

```
def mise_u(n):
    u=.....
    for i .................:
        u=.....
    return .....
```

☞ **Correction exercice 32 :** À faire au tableau.

5. De combien LeChiffre relance-t-il à **sa** 6ème relance ?

☞ **Correction exercice 32 :** Il faut réfléchir un peu : la 6ème relance du Chiffre est la... 12ème mise, donc u_{12} :

3. Expliquer pourquoi pour tout entier non nul n on a :

$$u_{n+1} = 2u_n + 150.$$

☞ **Correction exercice 32 :** C'est une simple traduction de l'énoncé : on double la mise et on rajoute 150 euros.

4. Compléter l'algorithme suivant pour calculer la valeur u_n pour une valeur de n donnée :

```
def mise_u(n):
    u=.....
    for i .................:
        u=.....
    return .....
```

☞ **Correction exercice 32 :** À faire au tableau.

5. De combien LeChiffre relance-t-il à **sa** 6ème relance ?

☞ **Correction exercice 32 :** Il faut réfléchir un peu : la 6ème relance du Chiffre est la... 12ème mise, donc u_{12} :

$$u_{12} = 716\ 650.$$

6. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $w_n = u_n + 150$.
    6.1 Démontrer que (w_n) est géométrique, préciser sa raison et son premier terme.

6. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $w_n = u_n + 150$.
   6.1 Démontrer que (w_n) est géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
   ☞ **Correction exercice 32 :** Archi-classique, pour tout entier naturel n :

6. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $w_n = u_n + 150$.
   6.1 Démontrer que (w_n) est géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
      ☞ **Correction exercice 32 :** Archi-classique, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} + 150 \\ &= 2u_n + 150 + 150 \\ &= 2(w_n - 150) + 300 \\ &= 2w_n. \end{aligned}$$

6. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $w_n = u_n + 150$.

 6.1 Démontrer que (w_n) est géométrique, préciser sa raison et son premier terme.

 ☞ **Correction exercice 32 :** Archi-classique, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} + 150 \\ &= 2u_n + 150 + 150 \\ &= 2(w_n - 150) + 300 \\ &= 2w_n. \end{aligned}$$

 Ainsi, (w_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $w_1 = 350$.

 6.2 Montrer que pour tout entier non nul n on a :

$$u_n = 350 \times 2^{n-1} - 150.$$

6. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $w_n = u_n + 150$.
   6.1 Démontrer que (w_n) est géométrique, préciser sa raison et son premier terme.

☞ **Correction exercice 32 :** Archi-classique, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} + 150 \\ &= 2u_n + 150 + 150 \\ &= 2(w_n - 150) + 300 \\ &= 2w_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (w_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $w_1 = 350$.

   6.2 Montrer que pour tout entier non nul n on a :

$$u_n = 350 \times 2^{n-1} - 150.$$

☞ **Correction exercice 32 :** (w_n) étant géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $w_1 = 350$, on a pour tout entier naturel n :

6. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $w_n = u_n + 150$.

6.1 Démontrer que (w_n) est géométrique, préciser sa raison et son premier terme.

☞ **Correction exercice 32 :** Archi-classique, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} + 150 \\ &= 2u_n + 150 + 150 \\ &= 2(w_n - 150) + 300 \\ &= 2w_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (w_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $w_1 = 350$.

6.2 Montrer que pour tout entier non nul n on a :

$$u_n = 350 \times 2^{n-1} - 150.$$

☞ **Correction exercice 32 :** (w_n) étant géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $w_1 = 350$, on a pour tout entier naturel n :

$$w_n = 350 \times 2^{n-1}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n :

6. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $w_n = u_n + 150$.

6.1 Démontrer que (w_n) est géométrique, préciser sa raison et son premier terme.

☞ **Correction exercice 32 :** Archi-classique, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} + 150 \\ &= 2u_n + 150 + 150 \\ &= 2(w_n - 150) + 300 \\ &= 2w_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (w_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $w_1 = 350$.

6.2 Montrer que pour tout entier non nul n on a :

$$u_n = 350 \times 2^{n-1} - 150.$$

☞ **Correction exercice 32 :** (w_n) étant géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $w_1 = 350$, on a pour tout entier naturel n :

$$w_n = 350 \times 2^{n-1}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n :

$$u_n = 350 \times 2^{n-1} - 150.$$

7. Quelle est la somme totale dans le pot après la n-ième mise ?

7. Quelle est la somme totale dans le pot après la n-ième mise ?

☞ **Correction exercice 32 :** On calcule :

7. Quelle est la somme totale dans le pot après la n-ième mise ?

☞ **Correction exercice 32 :** On calcule :

$$\begin{aligned}
u_1 + \ldots + u_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(350 \times 2^{k-1}\right) - 150 \times n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(350 \times 2^{k}\right) - 150 \times n \\
&= 350 \frac{1-2^n}{1-2} - 150 \times n \\
&= 350 \left(2^n - 1\right) - 150n.
\end{aligned}$$

7. Quelle est la somme totale dans le pot après la n-ième mise ?

☞ **Correction exercice 32 :** On calcule :

$$\begin{aligned} u_1 + \ldots + u_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(350 \times 2^{k-1}\right) - 150 \times n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(350 \times 2^{k}\right) - 150 \times n \\ &= 350 \frac{1-2^n}{1-2} - 150 \times n \\ &= 350\left(2^n - 1\right) - 150n. \end{aligned}$$

C'est la somme dans le pot après la n-ième mise.

8. LeChiffre jette l'éponge après la p-ième relance de James. Combien LeChiffre perd-il au total ?

8. LeChiffre jette l'éponge après la p-ième relance de James. Combien LeChiffre perd-il au total ?

☞ **Correction exercice 32 :** Question plus dure, car LeChiffre ne perd que les mises qu'il a placées dans le pot. Il faut donc calculer :

8. LeChiffre jette l'éponge après la p-ième relance de James. Combien LeChiffre perd-il au total ?

☞ **Correction exercice 32 :** Question plus dure, car LeChiffre ne perd que les mises qu'il a placées dans le pot. Il faut donc calculer :

$$\begin{aligned} u_2 + u_4 + \ldots + u_{2(p-1)} &= \sum_{k=1}^{p-1} \left(350 \times 2^{2k-1}\right) - 150 \times (p-1) \\ &= 350 \times 2^{-1} \frac{1-4^{p-1}}{1-4} - 150(p-1) \\ &= \frac{350}{6}\left(4^{p-1}-1\right) - 150(p-1). \end{aligned}$$

8. LeChiffre jette l'éponge après la p-ième relance de James. Combien LeChiffre perd-il au total ?

☞ **Correction exercice 32 :** Question plus dure, car LeChiffre ne perd que les mises qu'il a placées dans le pot. Il faut donc calculer :

$$\begin{aligned} u_2 + u_4 + \ldots + u_{2(p-1)} &= \sum_{k=1}^{p-1} \left(350 \times 2^{2k-1}\right) - 150 \times (p-1) \\ &= 350 \times 2^{-1} \frac{1-4^{p-1}}{1-4} - 150(p-1) \\ &= \frac{350}{6}\left(4^{p-1}-1\right) - 150(p-1). \end{aligned}$$

C'est la somme que LeChiffre perd !

Sommaire

♦ **SN.38** On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

1. 1.1 Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; 1],

$$f'(x) = 2(1-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

♦ **SN.38** On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

1. 1.1 Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; 1],

$$f'(x) = 2(1-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

☞ **Correction exercice 38 :** f est un produit de fonctions dérivables sur $[0, 1]$, donc une fonction dérivable sur $[0, 1]$, et $\forall x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\mathrm{e}^{-x} + 2x\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= (2-2x)\,\mathrm{e}^{-x} \\ &= 2\,(1-x)\,\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

1. 1.2 Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

1. 1.2 Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Correction exercice 38 : On étudie le **signe de la dérivée** qui donne les **variations** de la fonction. La dérivée est un produit de 3 facteurs :
   - 2 qui est toujours positif ;

Finalement :

1. 1.2 Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Correction exercice 38 : On étudie le **signe de la dérivée** qui donne les **variations** de la fonction. La dérivée est un produit de 3 facteurs :

- 2 qui est toujours positif ;
- $1-x$ dont on connait le signe par cœur... ou alors on résout $1-x \geqslant 0$...

Finalement :

1. 1.2 Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Correction exercice 38 : On étudie le **signe de la dérivée** qui donne les **variations** de la fonction. La dérivée est un produit de 3 facteurs :

- 2 qui est toujours positif ;
- $1-x$ dont on connait le signe par cœur... ou alors on résout $1-x \geqslant 0$...
- e^{-x} qui est toujours strictement positif car $\forall a \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{e}^{a} > 0$.

Finalement :

1. 1.2 Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Correction exercice 38 : On étudie le **signe de la dérivée** qui donne les **variations** de la fonction. La dérivée est un produit de 3 facteurs :
   - 2 qui est toujours positif ;
   - $1-x$ dont on connait le signe par cœur... ou alors on résout $1-x \geqslant 0$...
   - e^{-x} qui est toujours strictement positif car $\forall a \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{e}^{a} > 0$.

   Finalement :

1. 1.2 Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Correction exercice 38 : On étudie le **signe de la dérivée** qui donne les **variations** de la fonction. La dérivée est un produit de 3 facteurs :

- 2 qui est toujours positif ;
- $1 - x$ dont on connait le signe par cœur... ou alors on résout $1 - x \geqslant 0$...
- e^{-x} qui est toujours strictement positif car $\forall a \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{e}^{a} > 0$.

Finalement :

x	0		1
Signe de 2		$+$	
Signe de $1 - x$		$+$	0
Signe de e^{-x}		$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0
Variations de f	0	$\nearrow$	$2\mathrm{e}^{-1}$

Évidemment, on pouvait se passer des lignes pour le signe de 2 et de e^{-x} !

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

2. 2.1 Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1.$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

2. 2.1 Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1.$$

☞ **Correction exercice 38 :** C'est une récurrence (facile maintenant...), je rédige seulement l'hérédité :
Soit $k \in \mathbf{N}$, supposons $\mathrm{P}(k)$ vraie (où bien sûr on a défini $\mathrm{P}(n)$: «$0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$»).
Alors :

$$0 \leqslant u_k < u_{k+1} \leqslant 1$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

2. 2.1 Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1.$$

☞ **Correction exercice 38 :** C'est une récurrence (facile maintenant...), je rédige seulement l'hérédité :
Soit $k \in \mathbf{N}$, supposons $\mathrm{P}(k)$ vraie (où bien sûr on a défini $\mathrm{P}(n)$: «$0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$»).
Alors :

$$0 \leqslant u_k < u_{k+1} \leqslant 1$$

et f étant strictement croissante sur $[0,1]$, on a :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

2. 2.1 Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel,

$$0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1.$$

☞ **Correction exercice 38 :** C'est une récurrence (facile maintenant...), je rédige seulement l'hérédité :
Soit $k \in \mathbf{N}$, supposons $\mathrm{P}(k)$ vraie (où bien sûr on a défini $\mathrm{P}(n)$: «$0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$»).
Alors :

$$0 \leqslant u_k < u_{k+1} \leqslant 1$$

et f étant <u>strictement</u> croissante sur $[0, 1]$, on a :

$$f(0) \leqslant f(u_k) < f(u_{k+1}) \leqslant f(1)$$

$$0 < \leqslant u_{k+1} < u_{k+2} \leqslant \underbrace{2\mathrm{e}^{-1}}_{\approx 0,74} \leqslant 1$$

Ainsi, $\mathrm{P}(k) \Rightarrow \mathrm{P}(k+1)$ etc etc...

2. 2.2 En déduire que la suite (u_n) est convergente.

☞ **Correction exercice 38 :** On a montré avant que $\forall n \in \mathbf{N}, \quad 0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$, d'où on tire deux choses :

- (u_n) est croissante (et même strictement croissante) ;

D'après le cours, (u_n) converge, car toute suite croissante et majorée converge !

2. 2.2 En déduire que la suite (u_n) est convergente.

☞ **Correction exercice 38 :** On a montré avant que $\forall n \in \mathbf{N}, \quad 0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1$, d'où on tire deux choses :

- (u_n) est croissante (et même strictement croissante) ;
- (u_n) est majorée par 1.

D'après le cours, (u_n) converge, car toute suite croissante et majorée converge !