Chapitre 2

Géométrie dans l'espace

Vector is a useless survival, or offshoot from quaternions, and has never been of the slightest use to any creature.

Lord Kelvin (1824-1907).

I Vecteurs de l'espace

2.1.1 Translation

Définition 1 (Espace) — Dans ce chapitre, on appellera **espace** un ensemble de points tels que si A et B sont deux points, on identifie la translation qui envoie A sur B à un vecteur de $\mathbf{R}^3$ (c'est-à-dire, avec trois coordonnées au lieu de deux dans le plan).

On construit alors les sommes de vecteurs et les multiplications par un réel tout comme dans le plan.

Proposition 2.1 (Relation de Chasles, admis) — *Pour tous points A, B et C de l'espace :*

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

2.1.2 Vecteurs colinéaires, coplanaires

Définition 2 (Colinéarité) — Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$ et A, B, C tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.
On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe deux réels λ et μ où $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$ tels que $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}=\vec{0}$.
Dans ce cas, A, B et C sont dit alignés.

Définition 3 (Vecteurs coplanaires) — Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathbf{R}^3$ et A, B, C et D tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$.
On dit que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si il existe trois réels *non tous nuls* λ, μ et ν tels que :

Dans ce cas, on dit que A, B, C et D sont coplanaires : ils appartiennent à un même plan (voir plus loin).

2.1.3 Bases de l'espace et coordonnées

Définition 4 (Famille libre) — Soient $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, ..., $\vec{u}_n$ une famille de n ($n>0$) vecteurs de l'espace. On dit que cette famille est **libre** si :

Théorème 2.2 (admis) — *Une famille libre de l'espace admet au plus 3 vecteurs (nécessairement distincts).*

Définition 5 (Base de l'espace) — Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs formant une famille libre de l'espace, alors on dit que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est une **base** de l'espace.

Théorème 2.3 (admis) — *Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est une base de l'espace $\mathbf{R}^3$, alors tout vecteur $\vec{a}$ de l'espace s'écrit de manière unique :*

où $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$ sont les ***coordonnées*** *de $\vec{a}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.*

2.1.4 Repères de l'espace

Définition 6 (Repère de l'espace) — Un repère de l'espace est la donnée d'un point O, et d'une base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace.

2.1.5 Coordonnées d'un point

Proposition 2.4 (Coordonnées d'un point) — *Si $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est un repère de l'espace, alors pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ tel que :*

(x,y,z) sont alors les ***coordonnées*** *de M dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.*

Proposition 2.5 (Coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$) — *Si A et B sont deux points de l'espace de coordonnées respectives (x_A,y_A,z_A) et (x_B,y_B,z_B), alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :*

II Droites et plans de l'espace

2.2.1 Droites de l'espace

Définition 7 (Droite) — Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires est une **droite**.
$(A,\vec{u})$ est un repère de cette droite, on dit qu'elle a pour direction $\vec{u}$ ou qu'elle est dirigée par $\vec{u}$, ou encore que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite.

2.2.2 Représentation paramétrique d'une droite

Proposition 2.6 (Représentation paramétrique d'une droite) — *Soit la droite de l'espace passant par $A(x_A,y_A,z_A)$ et portée par un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.*
Alors $M(x,y,z)$ appartient à cette droite si et seulement si il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que :

Définition 8 — Avec les notations précédentes, le système d'équations $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$, où le paramètre t décrit $\mathbf{R}$, est appelé représentation paramétrique de la droite $(A,\vec{u})$.

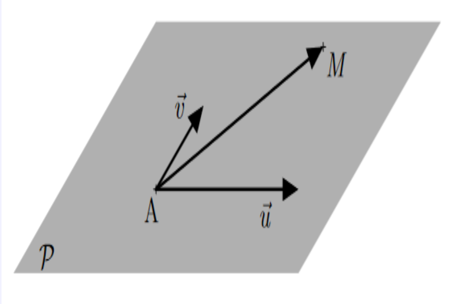
2.2.3 Intersection de droites

Définition 9 (Intersection de deux droites) — Deux droites de l'espace peuvent être **sécantes** (avoir un unique point d'intersection), **parallèles** (avoir même direction, c'est-à-dire que les vecteurs directeurs des deux droites sont colinéaires), ou ni sécantes ni parallèles.
Si les droites sont parallèles, elles peuvent être **confondues**.

2.2.4 Plans de l'espace

Définition 10 (Plan) —
Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ s'écrive comme **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un **plan**.
Cela signifie que M appartient au plan $(A,\vec{u},\vec{v})$ s'il existe deux réels λ et μ tels que :

$(A,\vec{u},\vec{v})$ est alors un **repère** du plan , de **direction** $(\vec{u},\vec{v})$.
$(\vec{u},\vec{v})$ est alors une **base** de la direction du plan.



Proposition 2.7 (Plan passant par trois points non alignés) — *Trois points A, B et C non alignés définissent un unique plan les contenant tous les trois qu'on nomme (ABC).*

Définition 11 (Points coplanaires) — On dit que quatre points de l'espace A, B, C et D sont **coplanaires** s'ils appartiennent à un même plan.

Proposition 2.8 — *Quatre points de l'espace A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires :*

III Positions relatives

2.3.1 Positions relatives droite/droite

Proposition 2.9 (Définition - proposition) — *Deux droites de l'espace sont :*
- *soit coplanaires (il existe un plan les contenant toutes les deux), dans ce cas deux cas sont possibles :*
  - *soit elles sont sécantes ;*
  - *soit elles sont parallèles.*
- *soit non coplanaires : aucun plan ne les contient toutes les deux.*

Théorème 2.10 — *Deux droites de l'espace parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.*

2.3.2 Positions relatives plan/plan

Proposition 2.11 (Position relative de deux plans, admis) — *Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de l'espace sont :*
- *soit parallèles (strictement, ou confondus), ce qui signifie que toute base de la direction de $\mathcal{P}$ est aussi une base de la direction de $\mathcal{P}'$;*
- *soit sécants, et leur intersection est alors une droite.*

Théorème 2.12 — *Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.*

2.3.3 Positions relatives plan/droite

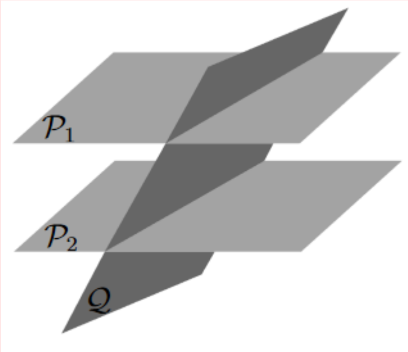
Proposition 2.13 (Position relative plan/droite, admis) — *Si $\mathcal{P}$ est un plan et $\mathcal{D}$ une droite de l'espace, alors :*
- *soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont sécants en un point ;*
- *soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont parallèles (strictement, ou confondus) : cela signifie qu'un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs d'une base de la direction de $\mathcal{P}$.*

Théorème 2.14 — *Soit $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Si $\mathcal{D}$ est parallèle à une droite $\mathcal{D}'$ incluse dans $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$.*

IV Parallélisme dans l'espace

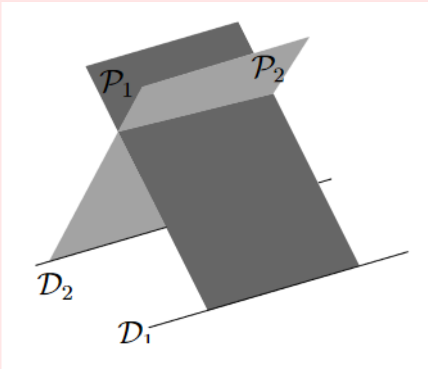
Théorème 2.15 —

Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans strictement parallèles. Tout plan $\mathcal{Q}$ qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection obtenues sont parallèles.



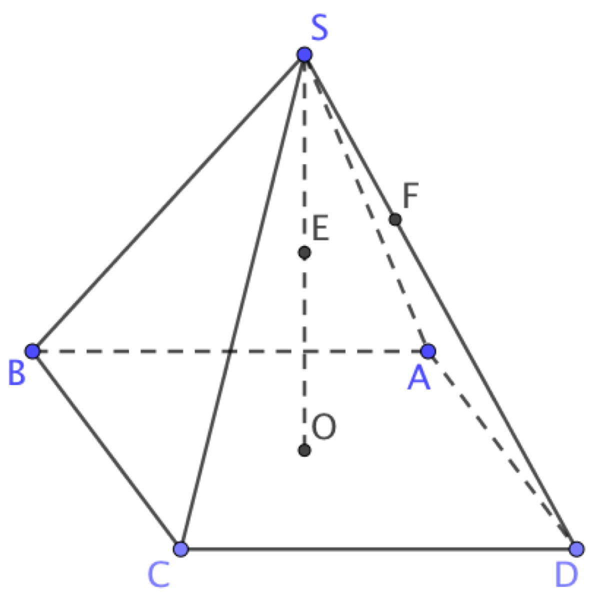
Théorème 2.16 (dit "du toit") —

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites de l'espace parallèles. Soit un plan $\mathcal{P}_1$ contenant $\mathcal{D}_1$ sécant à un autre plan $\mathcal{P}_2$ contenant $\mathcal{D}_2$.
Alors la droite Δ intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est parallèle à $\mathcal{D}_1$ et à $\mathcal{D}_2$.



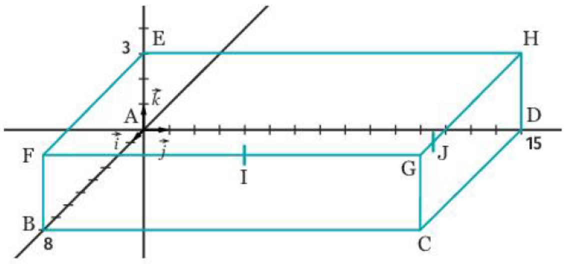
V Exercices

♦ **ESP.1** La pyramide $SABCD$ a pour base le carré $ABCD$ de centre O. Le point E est le milieu du segment $[SO]$ et le point F est défini par $\overrightarrow{SF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$.



1) Justifier que les points S,B,D,O,E et F appartiennent à un même plan.
2) a) Montrer que $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{SB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$
   b) Montrer que $\overrightarrow{BE} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{SD}$.
   c) En déduire que les points B,E et F sont alignés.
3) a) Étudier la position relative du plan (BEC) avec les plans (ABC) et (SCD).
   b) Étudier la position relative des plans (BEC) (SAD).
   c) Construire la section du plan (BEC) sur la pyramide $SABCD$.

♦ **ESP.2** L'espace est rapporté au repère $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Dans ce repère, nous avons tracé le parallélépipède rectangle ABCDEFGH comme indiqué sur la figure ci-dessous :



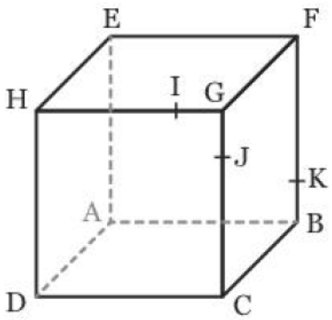
Les points $I(8;8;3)$ et $J(7;15;3)$ sont placés respectivement sur les segments $[FG]$ et $[GH]$.

1) Donner graphiquement les coordonnées du point C.
2) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{IC}$.
3) Soit K un point de la droite (EF).
   Déterminer les coordonnées du point K pour que les vecteurs $\overrightarrow{AK}$, $\vec{IJ}$ et $\vec{IC}$ soient coplanaires.
4) Soit M un point de la droite (EH).
   Déterminer les coordonnées du point M pour que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\vec{IJ}$ et $\vec{IC}$ soient coplanaires.
5) a) Montrer que les droites (AK) et (CJ) sont parallèles puis que les droites (AM) et (IC) le sont aussi.
   b) En déduire la position relative des plans (IJC) et (AMK) ?

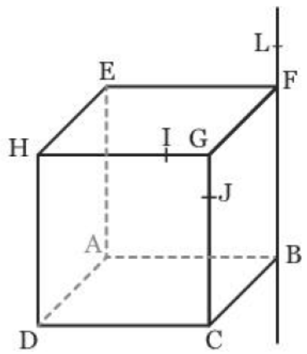
♦ **ESP.3** On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous.
On définit les points I et J respectivement par

$$\overrightarrow{HI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HG} \text{ et } \overrightarrow{JG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CG}.$$

1) Tracer sur la figure, sans justifier, la section du cube par le plan (IJK) où K est un point du segment $[BF]$.



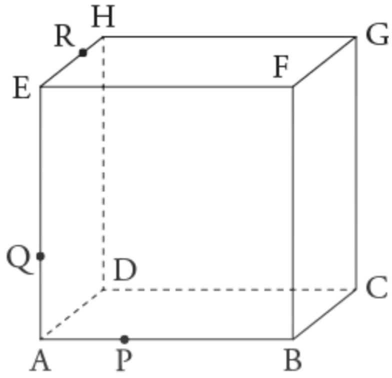
2) Tracer sur la figure, sans justifier, la section du cube par le plan (IJL) où L est un point de la droite (BF).



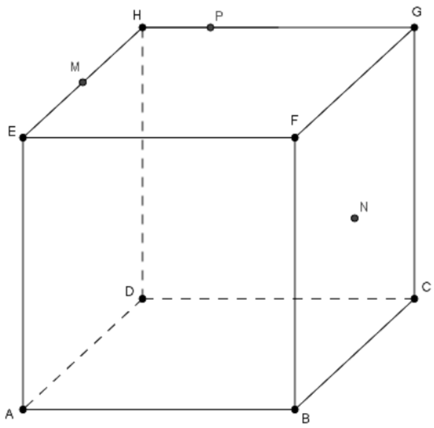
3) Existe-t-il un point P de la droite (BF) tel que la section du cube par le plan (IJP) soit un triangle équilatéral ? Justifier la réponse.

Sections

♦ **ESP.4** Tracer la section du cube par le plan formé par Q, P et R.



♦ **ESP.5** Tracer la section du cube par le plan formé par M, P et N (le point N appartenant à la face BFGC).



♦ **ESP.6** Tracer la section du cube par le plan formé par I, J et K.