

Lorsqu'on a une fonction f , donnée avec une formule $f(x)$, on vous demandera régulièrement de calculer sa *dérivée*. La dérivée de cette fonction permet en général de répondre à plusieurs questions :

- Quel est le lien entre la valeur d'une dérivée et la tangente à une courbe ?
- est-ce que les valeurs prises par le nombre $f(x)$ "augmentent" ou "diminuent" quand x augmente ?
- est-ce que la fonction f admet un maximum ou un minimum ?

1 Lien avec la tangente

Méthode 1.1 : Déterminer un nombre dérivé graphiquement

Le nombre dérivé d'une fonction en un point est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction en ce point.

On va avoir besoin de la proposition suivante :

Proposition 1.1 (Coefficient directeur d'une droite) — Si une droite passe par deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ (où $x_A \neq x_B$) alors son coefficient directeur m est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

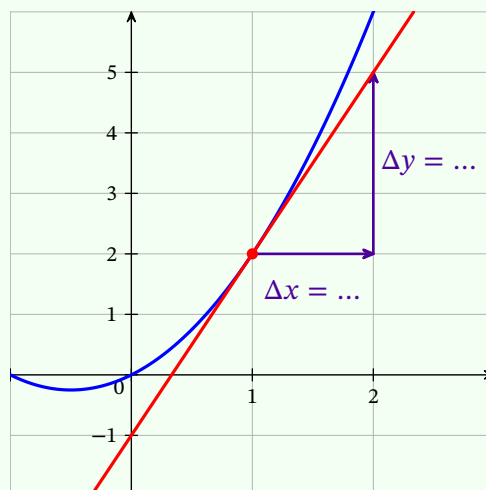
Exemple 1 Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 + x$ et sa courbe ci-dessous (en bleu), ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 (en rouge).

Au point d'abscisse 1 :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

C'est le **coefficient directeur de la tangente** au point d'abscisse 1.

Donc $f'(1) = \dots$



Retrouvons ce résultat par le calcul :

- $f(x) = x^2 + x$ donc :
- $f'(x) =$
- $f'(1) =$

On peut aussi avoir besoin de l'**équation de la tangente** :

Proposition 1.2 (Équation de la tangente) — Si f est une fonction dérivable en a , alors f admet une tangente en a d'équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

En particulier, le coefficient directeur de cette tangente est $f'(a)$.

Dans notre exemple, on a :

- $f(1) =$
- $f'(1) =$
- donc l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est : $y =$

2 Quelques formules

En filière STMG, on vous demande de connaître des formules permettant de calculer une dérivée. Je rappelle les principales formules pour dériver une expression ici :

Remarque 1 k est un nombre qui ne dépend pas de x (on dit que c'est une constante) et n est un entier naturel.

$f(x) =$	k	x	x^2	x^3	x^n
$f'(x) =$					

Parfois, une expression est constituée de sommes, de produits ou de quotient, on a alors :

Remarque 2 u et v sont ici des fonctions.

fonction f	$k \times u$	$u + v$	$u \times v$	$\frac{u}{v}$
dérivée f'				

♦ **DER.1** Compléter le tableau suivant :

$f(x) =$	10	-7	x	$10x$	$-30x$	x^2	$3x^2$	$-5x^2$	$9x + 3$	$4x^2 + 3x$	$9x^2 - 5x + 7$
$f'(x) =$											

♦ **DER.2** Donner l'expression des dérivées des fonctions définies par :

a) $f(x) = x^2 + 12$

b) $f(x) = 20(x^2 + 12)$

c) $f(x) = x^4 + 10x$

d) $f(x) = 17(x^4 + 10x)$

e) $u(x) = x^2 + 15x$ et $v(x) = 9x + 12$

.....

f) $f(x) = (x^2 + 15x)(9x + 12)$

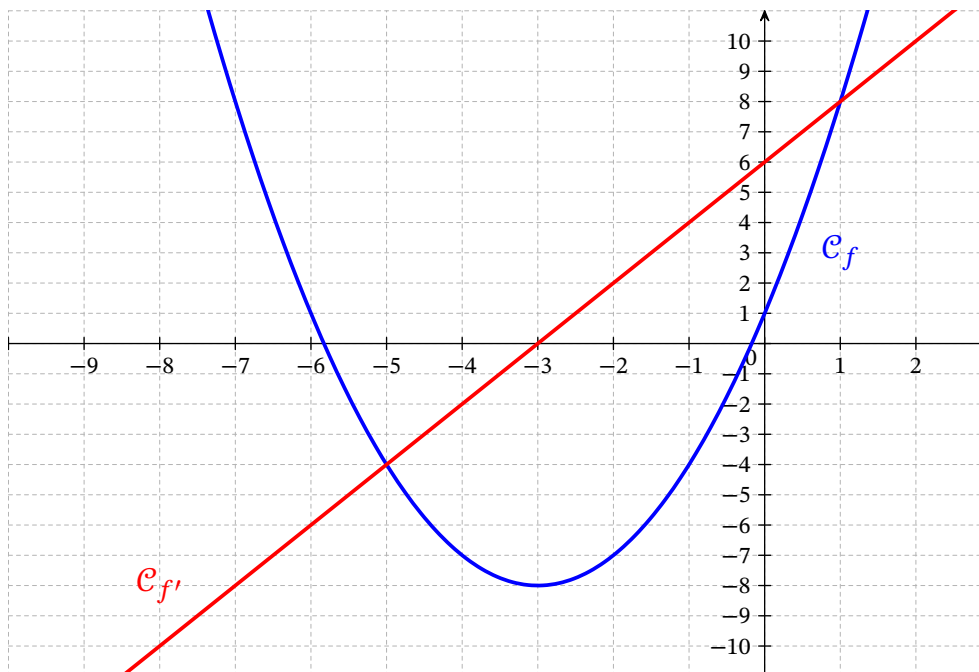
.....

g) $f(x) = (x^3 - 2)(x^2 + 10x)$

.....

3 Lien entre le signe de $f'(x)$ et les variations de f

Ci-dessous est tracée la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 6x + 1$ et de sa dérivée définie par $f'(x) = \dots\dots\dots$



1) Compléter le tableau de signe de $f'(x)$.

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		

2) Compléter les variations de la fonction f .

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f		

Le lien mis en évidence est vrai pour toutes les fonctions dérivables : on a :

Théorème 1.3 — Si f est une fonction dérivable et $f'(x)$ l'expression de sa fonction dérivée alors :

- Si sur un intervalle, $f'(x) \geq 0$ alors, sur cet intervalle, f est
- Si sur un intervalle, $f'(x) \leq 0$ alors, sur cet intervalle, f est

♦ **DER.3** On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 60x + 1$

1) Calculer l'expression de $f'(x)$.

.....

2) Montrer que $f'(x)$ peut s'écrire $(3x - 6)(2x + 10)$.

.....

.....

3) Dresser le tableau de signe de $f'(x)$:

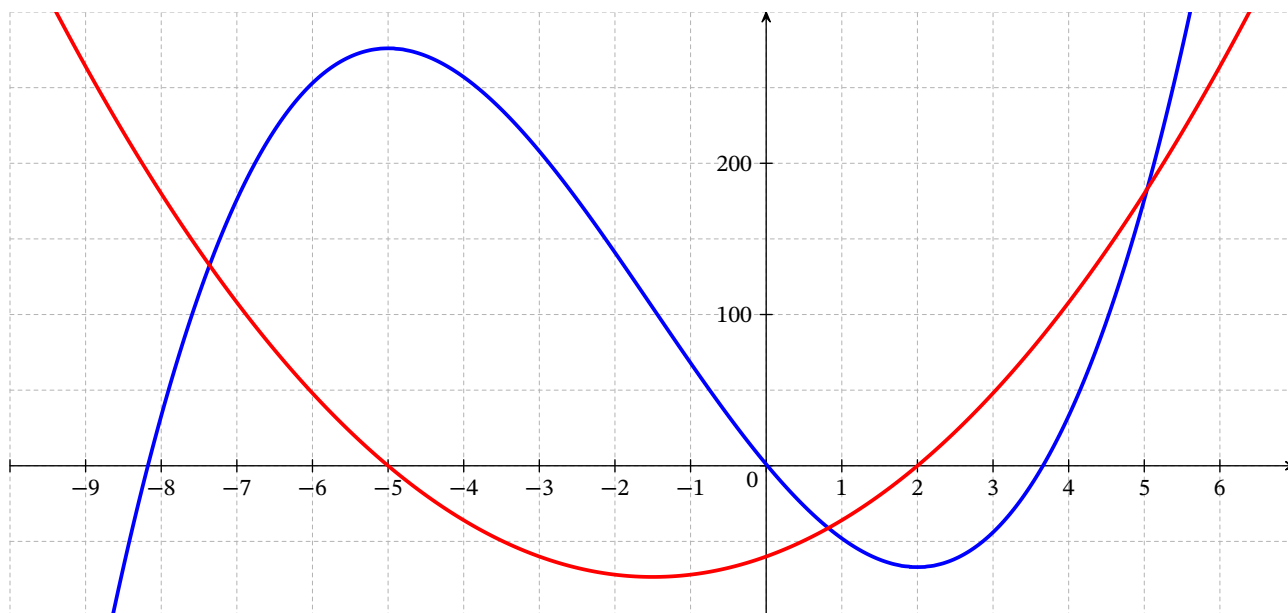
Calculs nécessaires :

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de		
Signe de		
Signe de $f'(x)$		

4) En déduire le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f		

5) Laquelle des deux courbes ci-dessous est celle de f et laquelle est celle de f' ?



4 Étude de produits et quotients

♦ **DER.4** On considère la fonction définie par $f(x) = (-3x - 1)(3x + 11)$.

1) Déterminer les fonctions u et v telles que $f = u \times v$.

.....

- 2) Calculer $u'(x)$ et $v'(x)$.

.....

- 3) En déduire $f'(x)$.

.....

.....

- 4) Dresser alors le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(x) = \dots\dots\dots$		
Variations de f		

♦ **DER.5** On considère la fonction définie par $f(x) = \frac{5x+2}{3x+12}$.

- 1) Déterminer les fonctions u et v telles que $f = \frac{u}{v}$.

.....

- 2) Calculer $u'(x)$ et $v'(x)$.

.....

- 3) En déduire $f'(x)$.

.....

.....

- 4) Dresser alors le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $\dots\dots\dots$		
Signe de $\dots\dots\dots$		
Signe de $f'(x)$		
Variations de f		