Chapitre 2 Fonction inverse

L'activité mathématique exige une pratique quotidienne. Si l'on s'interrompt trop longtemps, le savoir-faire s'érode. Les automatismes se perdent. C'est heureusement transitoire. On peut comparer cela à l'expérience des musiciens : Arthur Rubinstein disait « quand j'arrête de jouer une journée, je l'entends, quand j'arrête deux jours, le critique l'entend, quand j'arrête trois jours, le public l'entend. »

Alain Connes (1947 -).

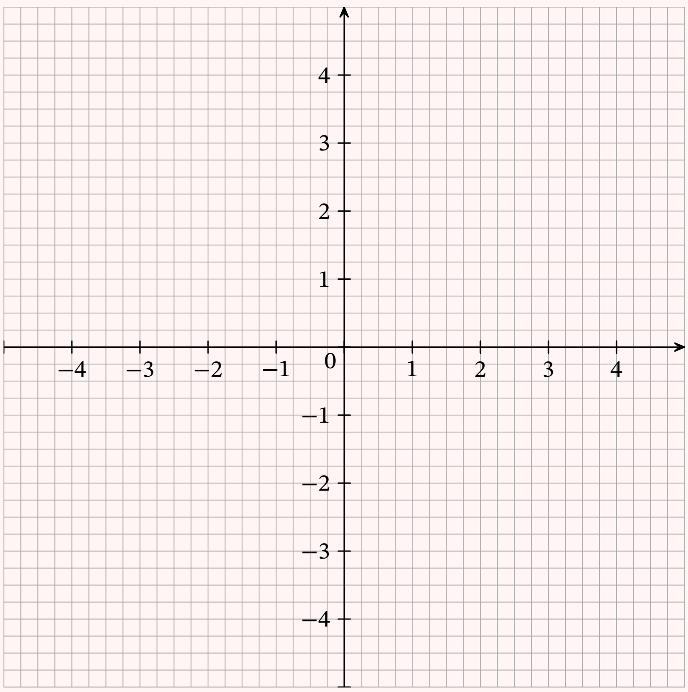
I Définition et limites

1.1 *Définition*

Définition 1 (Fonction inverse) — La fonction inverse est définie sur $\mathbf{R}$ privé de 0, qu'on note aussi $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ ou encore $\mathbf{R}^*$.
Cet ensemble de définition est la réunion de deux intervalles : $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
Pour tout x de cet ensemble, la fonction inverse a pour expression $\dfrac{1}{x}$.

1.2 *Représentation graphique*

Proposition 9.1 (Représentation graphique de la fonction inverse) —



1.3 *Comportement en* $+\infty$

x	10	20	100	1 000	2 000	1 000 000
$\dfrac{1}{x}$						

On dit que quand x tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{x}$ tend vers 0.

1.4 *Comportement en $-\infty$*

x	-10	-20	-100	$-1\,000$	$-2\,000$	$-1\,000\,000$
$\frac{1}{x}$						

On dit que quand x tend vers $-\infty$, $\frac{1}{x}$ tend vers 0.

1.5 *Comportement en 0 par valeurs positives*

x	10	1	0,1	0,05	0,01	0,001
$\frac{1}{x}$						

On dit que quand x tend vers 0^+, $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$.

1.6 *Comportement en 0 par valeurs négatives*

x	-10	-1	$-0{,}1$	$-0{,}05$	$-0{,}01$	$-0{,}001$
$\frac{1}{x}$						

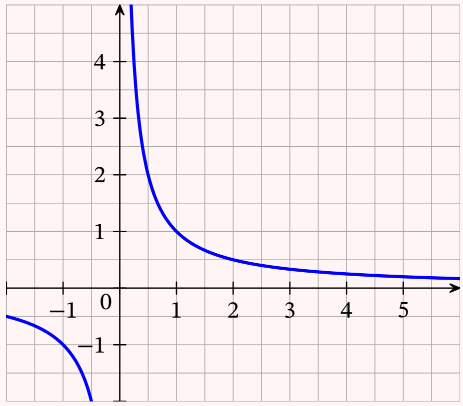
On dit que quand x tend vers 0^-, $\frac{1}{x}$ tend vers $-\infty$.

II Asymptotes

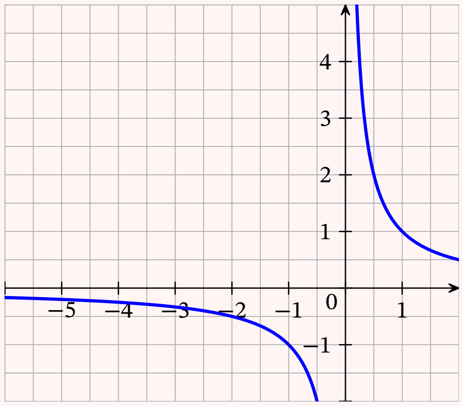
2.1 *Asymptote horizontale*

Proposition 9.2 (Asymptote horizontale à la courbe de la fonction inverse) —

Quand x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x}$ tend vers 0.
*On dit que **la droite d'équation $y=0$ est asymptote à la courbe de la fonction inverse en $+\infty$.***



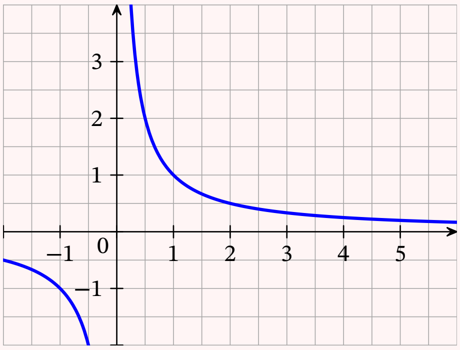
Quand x tend vers $-\infty$, $\frac{1}{x}$ tend vers 0.
*On dit que **la droite d'équation $y=0$ est asymptote à la courbe de la fonction inverse en $-\infty$.***



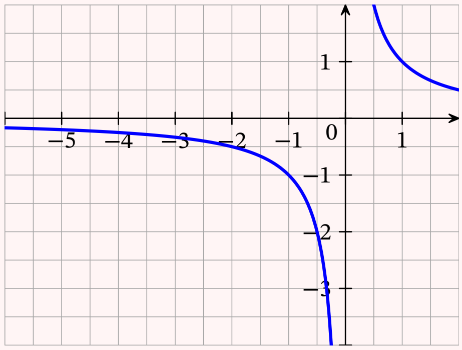
2.2 *Asymptote verticale*

Proposition 9.3 (Asymptote verticale à la courbe de la fonction inverse) —

Quand x tend vers 0^+, $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$.
On dit que ***la droite d'équation*** $x = 0$ ***est asymptote à la courbe de la fonction inverse en*** 0^+.



Quand x tend vers 0^-, $\frac{1}{x}$ tend vers $-\infty$.
On dit que ***la droite d'équation*** $x = 0$ ***est asymptote à la courbe de la fonction inverse en*** 0^-.



III Dérivée

3.1 *Dérivée*

Proposition 9.4 (Dérivée de la fonction inverse) — *La fonction inverse est dérivable sur chacun des intervalles* $]-\infty;0[$ *et* $]0;+\infty[$ *et pour tout nombre x dans ces intervalles, sa dérivée vaut :*

☞ **Exemple 1** La dérivée de la fonction inverse en 2 vaut $-\frac{1}{4}$. Calcul :

☞ **Exemple 2** Calculer les expressions dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = 2 \times \frac{1}{x} + 3 \times x^2 + 5$ $\qquad$ $g(x) = 4 \times \frac{1}{x} - 2x + 9$ $\qquad$ $h(x) = 4 \times \frac{7}{x} + 6$

3.2 *Variations*

Proposition 9.5 (Rappels sur les variations) —

- *Si la dérivée d'une fonction est positive sur un intervalle I alors la fonction est croissante sur I ;*
- *si la dérivée d'une fonction est négative sur un intervalle I alors la fonction est décroissante sur I.*

Proposition 9.6 (Variations de la fonction inverse) — *On se rappelle qu'un carré est toujours positif, ce qui donne le tableau de variations suivant :*

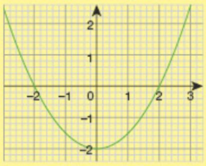
x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	

IV Exercices

Image et antécédent

Vrai ou faux ?

1 La fonction est donnée par sa courbe.



a. L'image de 1 est -2. ☐ V ☐ F

b. L'image de -2 est 0. ☐ V ☐ F

c. 0 est un antécédent de -2. ☐ V ☐ F

d. Les antécédents de 0 sont -2 et 2. ☐ V ☐ F

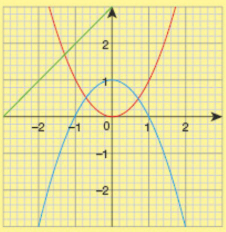
2 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est donnée par la formule $f(x) = x^2 - 2$.

a. L'image de 5 est 27. ☐ V ☐ F

b. L'image de -10 est 98. ☐ V ☐ F

Variations et courbe

3 Relier chaque courbe à son tableau de variations.



Courbe verte •

Courbe rouge •

Courbe bleue •

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$k(x)$	↘ ↗

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$k(x)$	↗ ↘

x	$-\infty$ $+\infty$
$k(x)$	↗

Dérivée d'une fonction polynôme

4 Vrai ou faux ?

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f' donnée est-elle bien la dérivée de f ?

a. $f(x) = x^2$ $f'(x) = 3x$ ☐ V ☐ F

b. $f(x) = x^2 + 2x$ $f'(x) = 2x$ ☐ V ☐ F

c. $f(x) = -x^2 + 3x^3$ $f'(x) = -2x + 3x^2$ ☐ V ☐ F

Dérivée et variation

5 Vrai ou Faux ?

a. Si la dérivée de la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
☐ V ☐ F

b. Si la dérivée de la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ alors f est positive sur $\mathbb{R}$.
☐ V ☐ F

c. Si la dérivée de la fonction f est négative sur $\mathbb{R}$ alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
☐ V ☐ F

d. Si la dérivée de la fonction f est négative sur $\mathbb{R}$ alors f est négative sur $\mathbb{R}$.
☐ V ☐ F

♦ **INV.1** La fonction f est définie par $f(x) = -\dfrac{1}{x} + 2x$ pour $x \neq 0$.

1) Calculer la dérivée de cette fonction.

2) Montrer que la dérivée de la fonction peut s'écrire $f'(x) = \dfrac{1+x^2}{x^2}$.

3) Quel est le signe de cette dérivée ?

4) Donner le tableau de variation de f.