

1 Relation de Chasles

L'un des outils le plus utilisé et le plus pratique est bien sûr la relation de Chasles :

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$$

et ce, pour tous points A, B et C de l'espace.

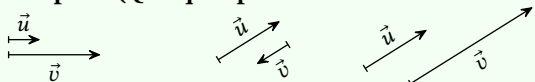
2 Vecteurs colinéaires

Méthode 8.1

Comment montrer que deux vecteurs sont colinéaires ?

L'idée géométrique est que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsqu'ils ont même direction (pas forcément même sens) :

☞ **Exemple 1 (Quelques paires de vecteurs colinéaires)**



L'idée analytique est qu'on peut exprimer l'un des deux vecteurs en fonction de l'autre :

Définition 1 — Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaires** s'il existe deux réels λ et μ **non tous nuls** tels que :

$$\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \vec{0}.$$

Remarque 1 L'idée du « non tous les deux nuls » est très importante : l'un des deux réels λ ou μ peut être nul, mais pas les deux en même temps (si non l'égalité $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \vec{0}$ est trivialement vraie pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en prenant $\lambda = 0$ et $\mu = 0$!).

Remarque 2 Si l'un des deux réels λ ou μ n'est pas nul, on peut réécrire (par exemple si $\mu \neq 0$) :

$$\vec{v} = -\frac{\lambda}{\mu} \vec{u}.$$

Ce qui explique mieux l'idée "exprimer l'un des deux vecteurs en fonction de l'autre".

Concrètement, si l'on a les coordonnées de deux vecteurs, on regarde si elles sont proportionnelles :

☞ **Exemple 2** Si on a les coordonnées : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$, ici on

calcule :

- $-2/1 = -2$;
- $4/(-2) = -2$;
- $-6/3 = -2$.

Donc on a $\vec{v} = -2\vec{u}$: on déduit de cette égalité que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Remarque 3 Si on a 0 dans la coordonnée d'un des deux vecteurs, on ne peut pas calculer les quotients comme on l'a fait dans l'exemple : il faut dans

ce cas, pour que les vecteurs soient colinéaires, que l'autre vecteur ait aussi cette coordonnée à 0, sinon ils ne sont pas colinéaires !

☞ **Exemple 3** $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -25 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, bien que $\frac{5}{2} = \frac{-25}{-10}$!

3 Vecteurs coplanaires

Méthode 8.2

Comment montrer que trois vecteurs sont coplanaires ?

Géométriquement, trois vecteurs sont coplanaires si on peut écrire l'un deux en fonction des deux autres.

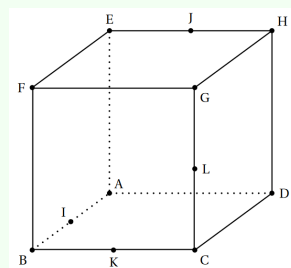
Analytiquement, on a :

Définition 2 — On dit que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si il existe trois réels *non tous nuls* λ , μ et ν tels que :

$$\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + \nu \vec{w} = \vec{0}.$$

Remarque 4 Dans l'égalité à montrer, il faut vérifier que l'un des trois réels λ , μ ou ν est non nul, mais deux de ces réels peuvent être nuls par exemple !

☞ **Exemple 4 (Sans coordonnées)** Voici un cube où I, J, K et L sont les milieux de leurs segments respectifs :



Les vecteurs $\vec{KL}$, $\vec{FB}$ et $\vec{EH}$ sont-ils coplanaires ?

Ici, on peut conjecturer que c'est le cas au vu de la figure : et en effet on a :

$$\begin{aligned} \vec{KL} &= \vec{KC} + \vec{CL} \\ &= \underbrace{\vec{EJ}}_{=\vec{KC}} - \frac{1}{2} \vec{FB} \\ &= \frac{1}{2} \vec{EH} - \frac{1}{2} \vec{FB} \end{aligned}$$

Donc finalement :

$$2\vec{KL} - \vec{EH} + \vec{FB} = \vec{0}$$

Ces trois vecteurs sont donc coplanaires car $2 \neq 0$.

Exemple 5 (Avec coordonnées) Supposons qu'on ait les co-

ordonnées de trois vecteurs : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$, et on veut

déterminer s'ils sont coplanaires.

On doit résoudre le système à trois inconnues λ , μ et ν :

$$\begin{aligned} \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + \nu \vec{w} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda - 3\mu - 9\nu = 0 \\ 2\lambda - 6\nu = 0 \\ 3\lambda + 6\mu + 3\nu = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -6\nu - 3\mu = 0 \\ \lambda = 3\nu \\ 12\nu + 6\mu = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -6\nu + 6\nu = 0 \\ \lambda = 3\nu \\ \mu = -2\nu \end{cases} \end{aligned}$$

La première ligne est toujours vérifiée : cela signifie qu'on peut choisir une valeur de ν arbitraire !

On pourrait prendre $\nu = 0$ mais ici ce n'est pas le but car alors on aurait $\lambda = \mu = \nu = 0$, or on souhaite savoir s'il existe des solutions ou les trois valeurs ne sont pas toutes nulles.

C'est le cas par exemple si $\nu = 1$: dans ce cas, $\lambda = 3$ et $\mu = -2$, ainsi on a montré que

$$3\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}.$$

Donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Remarque 5 (Très importante) Si, en résolvant le système, on obtient à la fin $\lambda = \mu = \nu = 0$ comme unique solution, c'est que les vecteurs ne sont pas coplanaires... Ils forment alors une **base de l'espace**.

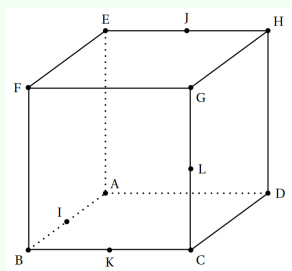
Méthode 8.3

Comment montrer que quatre points sont coplanaires ?

On utilise l'équivalence suivante :

Proposition 8.1 — Quatre points A , B , C et D de l'espace sont coplanaires si et seulement si $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ sont coplanaires.

Exemple 6 ($\vec{AJ}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AH}$ sont-ils coplanaires ?)



Les points A , J , D et H sont coplanaires (ils appartiennent tous à la même face $AEDH$) donc les vecteurs $\vec{AJ}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AH}$ sont coplanaires (sans plus de travail!).

Méthode 8.4

Comment montrer que trois vecteurs forment une base de l'espace ?

Montrer que le triplet de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme une base de l'espace revient à montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires, autrement dit que le système

$$\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + \nu \vec{w} = \vec{0}$$

admet pour **unique** solution $\lambda = \mu = \nu = 0$.

Exemple 7 (Avec coordonnées) Supposons qu'on ait les

coordonnées de trois vecteurs : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et on veut

déterminer s'ils forment une base de l'espace

On doit résoudre le système à trois inconnues λ , μ et ν :

$$\begin{aligned} \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + \nu \vec{w} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 4\mu = 0 \\ 2\mu + \nu = 0 \\ \lambda + \mu + \nu = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -4\mu \\ \nu = -2\mu \\ -4\mu + \mu - 2\mu = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \nu = 0 \\ \mu = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Et ici, la seule solution du système de départ étant $(0,0,0)$, les trois vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forment bien une base de l'espace.