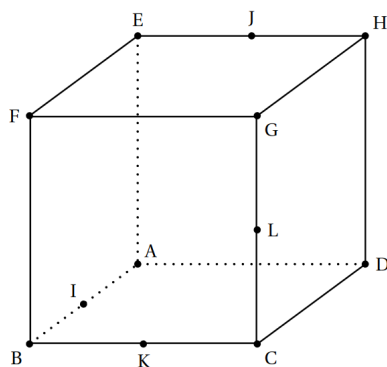


On utilisera cette figure dans toute la fiche :



1 Droite/droite

Méthode 9.1

Comment déterminer la position relative de deux droites ?

Si d et d' sont deux droites de l'espace, d'après le cours, il n'y a que trois possibilités :

- d et d' sont coplanaires, avec deux sous-cas :
 - d et d' sont parallèles ;
 - d et d' sont sécantes.
- d et d' ne sont pas coplanaires (et donc ni parallèles, ni sécantes).

Méthode 9.2

Comment montrer que deux droites sont parallèles ?

d et d' sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

☞ **Exemple 1** ((AD) et (BH) sont-elles parallèles ?) On reprend la figure précédente : (AD) et (BH) sont parallèles car $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BK}$. Ici, on peut aussi dire que les arêtes du cube $[AD]$ et $[BC]$ sont parallèles car la face $ADCB$ est un carré. Remarquez que cela implique que (AD) et (BK) sont coplanaires.

Méthode 9.3

Comment montrer que deux droites ne sont pas coplanaires ?

☞ **Exemple 2** (Dans la figure précédente, quelle est la position relative de (FG) et (EA) ?) On reprend la figure précédente : (FG) et (EA) sont pas coplanaires car elles ne sont pas parallèles (ces arêtes de cube sont même orthogonales) et (EA) est incluse dans $EADH$, FG est incluse dans $FGCB$ et ces deux faces du cube sont strictement parallèles (donc non sécantes).

Méthode 9.4

Comment montrer que deux droites sont sécantes ?

Il suffit de montrer qu'elles sont coplanaires mais pas parallèles ! Comme (AD) et (IK) par exemple...

2 Plan/plan

Méthode 9.5

Comment déterminer la position relative de deux plans ?

Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux plans de l'espace, d'après le cours, il n'y a que trois possibilités :

- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants, et dans ce cas leur intersection est une droite ;
- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles, avec deux cas possibles :
 - strictement si leur intersection est vide ;
 - sinon $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus.

En pratique, on cherche si les plans ont un point d'intersection : si c'est le cas, alors il faut déterminer si les plans ont une droite comme intersection ou sont confondus.

☞ **Exemple 3** (Dans la figure précédente, quelle est la position relative de (IKG) et (CLD) ?)

$G \in (CL)$ donc $G \in (CLD)$ et $G \in (IKG)$ donc ces deux plans ont un point en commun : G . Il convient maintenant de savoir si ces plans sont confondus (s'ils sont parallèles) ou ont une droite comme intersection.

On peut montrer (par exemple à l'aide des coordonnées) que $\overrightarrow{CL}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CK}$ ne sont pas coplanaires : donc ces points n'appartiennent pas tous à un même plan, donc les plans (IJK) et (CLD) ne sont pas confondus et sont donc sécants en une droite passant par G .

3 Plan/droite

Si d est une droite et $\mathcal{P}$ un plan, alors il y a trois cas possibles :

- d et $\mathcal{P}$ sont sécants en un point ;
- d et $\mathcal{P}$ sont parallèles, avec deux sous-cas :
 - d est incluse dans $\mathcal{P}$;
 - d et $\mathcal{P}$ sont strictement parallèles (ils n'ont aucun point en commun).

Méthode 9.6

Comment montrer qu'une droite est parallèle à un plan ?

Essentiellement, deux façons de faire :

- si d est parallèle à une droite incluse dans $\mathcal{P}$, alors $d // \mathcal{P}$;

- si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d , et $(\vec{v}, \vec{w})$ une base de $\mathcal{P}$, alors d est parallèle à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

☞ **Exemple 4 (Montrer que $(IK)/(EGA)$.)** Dans le repère

$$(B, \vec{BC}, \vec{BA}, \vec{BF}), \text{ on a } \vec{IK} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{EG} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{EG} = 2\vec{IK}, \text{ ainsi}$$

(EG) est (IK) sont parallèles, donc (IK) est parallèle au plan (EGA) .

De plus, on peut montrer que $\vec{EG}$, $\vec{EA}$ et $\vec{EI}$ ne sont pas coplanaires, donc I, E, A et G ne sont pas contenus dans un même plan : ainsi (IK) est strictement parallèle à (EGA) .

appartient bien à (EC) .

Sans représentation paramétrique, on peut aussi s'en sortir : si d est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par A , alors $M \in d$ si et seulement si $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

4 Équation paramétrique de droite

D'après le cours, pour avoir une équation paramétrique d'une droite d , on a besoin des coordonnées d'un vecteur directeur de d et d'un point passant par d .

☞ **Exemple 5 (Dans le repère $(B, \vec{BC}, \vec{BA}, \vec{BF})$, donner une représentation paramétrique de (EC) .)** On calcule les coordonnées de E :

$$\begin{aligned} \vec{BE} &= \vec{BF} + \vec{FE} \\ &= \vec{BF} + \vec{BA} \end{aligned}$$

Donc $E(0;1;1)$. De plus $C(1;0;0)$ de manière immédiate donc

$$\vec{EC} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ Ainsi, une représentation paramétrique de la droite } d$$

est :

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

Cela signifie qu'un point de d a pour coordonnées $(t, 1-t, 1-t)$ où $t \in \mathbf{R}$.

Méthode 9.7

Comment savoir si un point appartient à une droite ?

☞ **Exemple 6 (Avec représentation paramétrique)** On reprend l'exemple précédent : est-ce que les point $(2;3;3)$ et $(-4;5;5)$ appartiennent à la droite (EC) ? Pour $(2;3;3)$, on résout :

$$\begin{cases} 2 = 0 + t \\ 3 = 1 - t \\ 3 = 1 - t \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2 \\ t = -2 \\ t = -2 \end{cases}$$

On ne peut pas avoir en même temps $t = 2$ et $t = -2$ donc ce système n'a pas de solution : ainsi $(2;3;3)$ n'appartient pas à (EC) . On fait de même pour $(-4;5;5)$:

$$\begin{cases} -4 = 0 + t \\ 5 = 1 - t \\ 5 = 1 - t \end{cases} \iff \begin{cases} t = -4 \\ t = -4 \\ t = -4 \end{cases}$$

Ce système admet une solution : $t = -4$, donc le point $(-4;5;5)$