

Fiche 10 | Calculs de limites

Cette fiche se veut un outil très pratique sur trois cas de calculs de limites qu'on rencontre souvent au lycée.

1 Fonctions polynomiales

Méthode 10.1

Comment déterminer la limite d'une fonction polynomiale en $\pm\infty$?

☞ **Exemple 1 (Limite de $x^3 + 2x^2$ en $-\infty$)**

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ car 3 est impair;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 = +\infty$ car 2 est pair.

D'où une forme indéterminée qu'il faut lever. La méthode, c'est de factoriser par le terme de plus haut degré ! Ici, pour tout x non nul :

$$x^3 + 2x^2 = x^3 \left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

Et maintenant :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ car 3 est impair;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{2}{x} = 1$.

Donc finalement, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 2x^2 = -\infty$.

2 Fonctions quotients

Méthode 10.2

Comment déterminer la limite d'un quotient ?

Il arrive régulièrement qu'on doive calculer la limite d'un quotient où le dénominateur tend vers 0. Souvenez-vous qu'une valeur constante (non nulle !) divisée par quelque chose qui tend vers 0 "explose" : soit vers $+\infty$, soit vers $-\infty$ - pour peu que le quotient ne change pas de signe ! - Pour étudier le quotient, il faut :

- étudier séparément numérateur et dénominateur;
- vérifier que le numérateur ne tend pas aussi vers 0, sinon on a une forme indéterminée;
- étudier le signe du quotient.

☞ **Exemple 2 (Limite de $\frac{1+x}{1-x}$ en 1^-)** : On a un quotient donc on commence par étudier :

- la limite du numérateur (sans difficulté ici) : $\lim_{x \rightarrow 1^-} 1+x = 2$;
- la limite du dénominateur (sans difficulté non plus) : $\lim_{x \rightarrow 1^-} 1-x = 0$.

Il faut donc étudier le **signe** du quotient pour avoir sa limite : $+\infty$ ou $-\infty$ ici. Le signe du numérateur est constant quand x tend vers 1^- : il est positif. De plus :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Signe de $1-x$	+	0	-

Ainsi, quand x tend vers 1^- , $1-x \geq 0$ donc le quotient $\frac{1+x}{1-x}$ est positif, ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1+x}{1-x} = +\infty.$$

Remarquez qu'avec le tableau on a aussi immédiatement que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1+x}{1-x} = -\infty.$$

3 Croissances comparées

Méthode 10.3

Les croissances comparées

Il y a quelques limites qui sont a priori des formes indéterminées mais qui sont levées par le cours :

Théorème 10.1 (Croissances comparées) — Pour tout entier naturel n non nul :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

☞ **Exemple 3 (Calcul de $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x - 2)e^x$)** On démarre en étudiant chaque facteur du produit (puisque $f(x)$ est un produit !):

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 2x - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}\right) = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

On a donc une forme indéterminée, mais le théorème des croissances comparées va nous permettre de conclure ! On écrit :

$$(x^2 - 2x - 2)e^x = x^2 e^x - 2x e^x - 2e^x$$

Et, par croissances comparées :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x e^x = 0$.

De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2e^x = 0$, donc au final :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x - 2)e^x = 0.$$