

1 Continuité

Méthode 11.1

Comment déterminer si une fonction est continue ?

Commençons par la définition :

Définition 1 (Continuité en un point) — Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

On dit que f est **continue en a** si f admet une limite en a (qui est alors nécessairement $f(a)$).

En pratique, souvent, on s'appuie sur toute une gamme de fonctions dont on sait qu'elles sont continues :

Proposition 11.1 (admis) — Les fonctions polynômiales, valeur absolue, racine carrée, exponentielle sont continues sur leur intervalle de définition.

Proposition 11.2 (admis) — Si f et g sont deux fonctions continues en un point a , alors :

- $f + g$ est continue en a ;
- fg est continue en a ;
- si g ne s'annule pas en a , alors $\frac{f}{g}$ est continue en a ;
- si g est continue en a et que f est continue en $g(a)$, alors $f \circ g$ est continue en a .

Voici un exemple où on étudie la continuité d'une fonction définie par morceaux (i.e avec différentes expressions suivant les valeurs de x).

☞ **Exemple 1** On considère la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} (x+2)e^x & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \\ \sqrt{x}(x+1)-1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

f est-elle continue sur $\mathbf{R}$?

- L'expression $x \mapsto (x+2)e^x$ est continue sur $\mathbf{R}$ comme produit de fonctions continues sur $\mathbf{R}$, donc f est continue sur $] -\infty; 0[$.
- L'expression $x \mapsto \sqrt{x}(x+1)-1$ est continue sur $[0; +\infty[$ (attention à la racine carrée) comme produit de fonctions continues sur $[0; +\infty[$, donc f est continue sur $]0; +\infty[$ (remarquez qu'on exclut zéro puisqu'en 0 et à sa gauche, l'expression $f(x)$ n'est pas $\sqrt{x}(x+1)-1$!)

Reste le point 0.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}(x+1)-1 = -1$;
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+2)e^x = 2 \times 1 = 2$.

Donc f n'est pas continue en zéro !

☞ **Exemple 2 (Un autre exemple d'étude de continuité)**

Justifier que la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+2}.$$

est continue sur $\mathbf{R}$.

f est le quotient de deux fonctions polynomiales donc continues sur $\mathbf{R}$.

De plus, le dénominateur $x^2 + 2$ est toujours supérieur à 2 (car pour tout réel x , $x^2 \geq 0$) donc il ne s'annule jamais.

Ainsi f est continue sur $\mathbf{R}$ comme quotient de fonctions continues sur $\mathbf{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

Enfin, on n'oubliera pas qu'on peut utiliser le théorème suivant (surtout si l'énoncé admet que la fonction est dérivable!) :

Théorème 11.3 (Condition suffisante de continuité)

— Si f est une fonction dérivable en a , alors elle est continue en a .

Attention, la réciproque est fausse ! La valeur absolue est continue en zéro mais pas dérivable en ce point.

2 Dérivabilité

Méthode 11.2

Comment déterminer si une fonction est dérivable ?

Définition 2 (Dérivabilité en un point) — Soit f définie sur I .

On suppose qu'en un point a de I , la quantité $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers une valeur ℓ lorsque h tend vers 0, c'est-à-dire :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell.$$

On dit alors que f est **dérivable en a** et que **le nombre dérivé de f en a est égal à ℓ** et on note :

$$f'(a) = \ell.$$

Remarque 1 Pour la dérivabilité, si jamais il faut revenir à la définition, je donne un exemple pour montrer "à la main" qu'une fonction est dérivable en un point (on peut vous le demander !), mais la plupart du temps on se ramène en fait aux résultats de dérivabilité des fonctions de référence.

☞ **Exemple 3 (Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2 + x$ est dérivable en 1)**

Soit $h \neq 0$. On calcule :

$$\begin{aligned} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \frac{(1+h)^2 + (1+h) - 2}{h} \\ &= \frac{h^2 + 3h + 2 - 2}{h} \\ &= \frac{h^2 + 3h}{h} \\ &= h + 3 \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} 3 \end{aligned}$$

Ainsi, f est dérivable en 1 et $f'(1) = 3$.

Remarque 2 Bien sûr, ici on retrouve le résultat qu'on aurait obtenu à l'aide des formules du cours : f est polynomiale de degré deux donc dérivable sur $\mathbf{R}$ (donc en 1) et comme $f'(x) = 2x + 1$ on a bien $f'(1) = 3$.

3 Lien avec la tangente

Méthode 11.3

Comment déterminer l'équation de la tangente à une courbe ?

Il faut connaître la proposition ci-dessous !

Proposition 11.4 (Équation de la tangente) — Si f est une fonction dérivable en a , alors f admet une tangente en a d'équation :

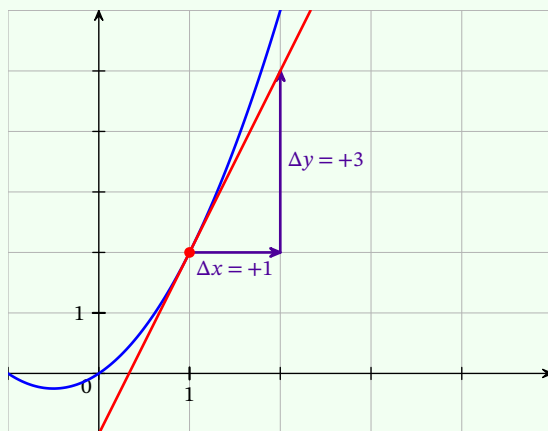
$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

En particulier, le coefficient directeur de cette tangente est $f'(a)$.

Exemple 4 On reprend la fonction $f : x \mapsto x^2 + x$. En 1, on a calculé que $f'(1) = 3$, de plus $f(1) = 2$ donc l'équation de sa tangente est $y = 3(x - 1) + 2$, soit

$$y = 3x - 1.$$

Illustration (la tangente est en rouge, la courbe de f en bleu) :



Remarque 3 Remarquez que parfois, dans les exercices on vous donne graphiquement la tangente ou des points par lesquelles elle passe et vous devez trouver son équation. Pour la retrouver, on peut déterminer graphiquement le coefficient directeur ou utiliser la formule :

Proposition 11.5 (Coefficient directeur d'une droite) — Si une droite passe par $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors son coefficient directeur est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

(pour peu que A et B n'aient pas la même abscisse bien entendu!).