

Fiche 12 | Dérivabilité globale

1 Tableau des dérivées

Remarque 1 k , m et p sont des nombres qui ne dépendent pas de x (on dit que ce sont des constantes) et n est un entier naturel.

$f(x) =$	k	$mx + p$	x^2	x^n	$1/x^n$	$\sqrt{x}$	$\sin x$	$\cos x$	e^x	$\ln x$
$f'(x) =$	0	m	$2x$	nx^{n-1}	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$	e^x	$\frac{1}{x}$

Pour les fonctions plus élaborées, on utilise les formules suivantes :

Remarque 2 u et v sont ici des fonctions.

fonction f	ku	$u + v$	uv	$\frac{1}{u}$	$\frac{u}{v}$	u^n	$\sqrt{u}$	e^u	$\ln u$
dérivée f'	ku'	$u' + v'$	$u'v + uv'$	$\frac{-u'}{u^2}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$nu'u^{n-1}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u'e^u$	$\frac{u'}{u}$

2 Composition de dérivée

La formule de dérivation des fonctions composées qui permet de retrouver toutes celles du tableau précédent :

Théorème 12.1 (Dérivée d'une composée) — Si u est dérivable en a et g est dérivable en $u(a)$, alors $g \circ u$ est dérivable en a et :

$$(g \circ u)' = u' \times (g' \circ u).$$

Exemple 1

Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \cos(2x^3)$.

On commence en écrivant $f(x) = g(u(x))$ où $g(x) = \cos(x)$ et $u(x) = 2x^3$.

$x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto 2x^3$ sont des fonctions de référence dérivables sur $\mathbf{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbf{R}$.

- $g'(x) = -\sin(x)$;

- $u'(x) = 6x^2$.

Donc pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \times g'(u(x)) \\ &= -6x^2 \sin(2x^3) \end{aligned}$$

3 Variations d'une fonction

On applique essentiellement le théorème suivant :

Théorème 12.2 (Lien entre dérivée et variations) — Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors :

- Si pour tout x appartenant à I , $f'(x) \geq 0$, alors f est **croissante** sur I .
- Si pour tout x appartenant à I , $f'(x) > 0$ sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors f est **strictement croissante** sur I ;
- Si pour tout x appartenant à I , $f'(x) \leq 0$, alors f est **décroissante** sur I .
- si pour tout x appartenant à I , $f'(x) < 0$ sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors f est **strictement décroissante** sur I .
- Si pour tout x appartenant à I , $f'(x) = 0$, alors f est **constante** sur I .

Exemple 2

Étude de $g : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 1$.

g est polynomiale donc dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout réel x :

$$g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1).$$

On étudie le signe de $g'(x)$, cela nous permet d'avoir le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
Signe de $6x$	-	0	+	+	
Signe de $x - 1$	-	-	0	+	
Signe de $g'(x)$	+	0	-	0	+
Variations de g	$-\infty$ -1 $+\infty$ -1 -2 $+\infty$				

Exemple 3

Étude de la fonction $f : x \mapsto x - 1 - e^x$.

- f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$. De plus :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = 1 - e^x.$$

- Écrivons le tableau de variations de f , sachant que :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow 1 - e^x &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow e^x &\leq 1 \\
 \Leftrightarrow x &\leq 0
 \end{aligned}$$

Donc finalement :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f	$ \begin{array}{c} \nearrow -2 \quad \searrow \\ \quad \quad \quad \end{array} $		

D'après le tableau de variations, f admet un maximum en 0 qui vaut -2 .

Exemple 4 (Inégalité) On peut aussi utiliser une étude de fonction pour obtenir une inégalité. Par exemple, puisque la fonction f précédente admet un maximum en 0 qui vaut -2 , on a :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) \leq -2.$$

Ce qui revient à :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad x - 1 - e^x \leq -2.$$

Soit encore :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad e^x \geq x + 1.$$

Ce qu'on peut constater graphiquement :

