

Les numéros d'exercices et de questions doivent être soulignés, les résultats encadrés.  
Soyez clairs et précis dans votre rédaction et dans la présentation de vos calculs.

♦ **DS 1.1** Calculer les limites des suites ci-dessous :

1)  $u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$  ;

4)  $x_n = \frac{-n^2 + 3n + 1}{n^3 + 4n}$  ;

2)  $v_n = -n^2 + 3n + 1$  ;

5)  $y_n = \frac{\cos(n) + n}{n^2 + 1}$  ;

3)  $w_n = \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - 7\right)(-n^2 + 3n + 1)$  ;

6)  $z_n = \frac{a_n - 3}{1 - a_n}$  où la suite  $(a_n)$  vérifie :  
•  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$  et  $\forall n \in \mathbf{N}, a_n > 1$ .

♦ **DS 1.2** Le but de l'exercice est d'étudier la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}.$$

1) On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{2x + 3}{x + 4}$  définie sur  $[1; 2]$ .

a) Montrer que  $f$  est strictement croissante sur  $[1; 2]$ .

b) En déduire, en utilisant un raisonnement par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 1 < u_n \leq 2.$$

2) a) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(3 + u_n)}{u_n + 4}.$$

b) En déduire les variations de  $(u_n)$ .

3) Démontrer que  $(u_n)$  est convergente.

4) On pose, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$v_n = \frac{u_n + 3}{u_n - 1}.$$

a) Justifier que le nombre  $v_n$  est bien défini pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .

b) Démontrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique.

c) En déduire, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , l'expression de  $v_n$  puis celle de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

d) Calculer la limite de  $(u_n)$ .

e) On considère le programme suivant, qui a pour objectif de déterminer le premier rang à partir duquel les termes  $u_n$  sont strictement compris entre 1 et  $1 + 10^{-8}$ . Recopier et compléter ce programme, puis indiquer la valeur obtenue :

```
def rang():
    u=2
    n=0
    while ... :
        u=
        n=
    return n
```

## Correction exercice 2 :

- 1) a) La fonction  $f$  est de la forme  $f = \frac{u}{v}$  avec  $u : x \mapsto 2x+3$  et  $v : x \mapsto x+4$  sont deux fonctions dérivables sur  $[1; 2]$  et le dénominateur ne s'annule pas sur  $[1; 2]$ .

On en déduit que  $f$  est dérivable sur  $[1; 2]$  et, pour tout  $x \in [1; 2]$ ,

$$f'(x) = \frac{2(x+4) - (2x+3) \times 1}{(x+4)^2} = \frac{2x+8-2x-3}{(x+4)^2} = \frac{5}{(x+4)^2} > 0.$$

Donc la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[1; 2]$ .

- b) Considérons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la proposition  $P_n : \ll 1 < u_n \leq 2 \gg$ .

• Comme  $u_0 = 2$ ,  $P_0$  est vraie.

• Supposons  $P_k$  vraie pour un certain  $k \in \mathbb{N}$ . Alors  $1 < u_k \leq 2$  et, comme  $f$  est croissante sur  $[1; 2]$ , on a  $f(1) < f(u_k) \leq f(2)$ .

Or  $f(1) = 1$ ,  $f(u_k) = u_{k+1}$  et  $f(2) = \frac{7}{6} \leq 2$ , donc  $1 < u_{k+1} \leq \frac{7}{6} \leq 2$ , i.e.  $P_{k+1}$  est vraie.

On a donc montré par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $1 < u_n \leq 2$ .

- 2) a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4} - u_n = \frac{2u_n + 3 - u_n(u_n + 4)}{u_n + 4} = \frac{-u_n^2 - 2u_n + 3}{u_n + 4}.$$

Or  $(1 - u_n)(3 + u_n) = 3 + u_n - 3u_n - u_n^2 = -u_n^2 - 2u_n + 3$ . Donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(3 + u_n)}{u_n + 4}.$$

- b) On a vu en 1.b que  $u_n > 1$ , donc  $1 - u_n < 0$ ,  $3 + u_n > 0$  et  $u_n + 4 > 0$ . Ainsi  $u_{n+1} - u_n < 0$ , donc  $(u_n)$  est (strictement) décroissante.

- 3)  $(u_n)$  étant strictement décroissante et minorée par 1, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge.

- 4) On pose  $v_n = \frac{u_n + 3}{u_n - 1}$ .

- a) On a vu en 1.b que  $u_n > 1$ , donc  $u_n \neq 1$ . Ainsi  $v_n$  est bien défini pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- b) Soit  $n \in \mathbb{N}$  :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 3}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} + 3}{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} - 1} = \frac{2u_n + 3 + 3(u_n + 4)}{2u_n + 3 - (u_n + 4)} = \frac{5u_n + 15}{u_n - 1} = 5 \cdot \frac{u_n + 3}{u_n - 1}.$$

Donc  $v_{n+1} = 5v_n$ , ce qui prouve que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 5.

- c) On a  $v_n = v_0 \cdot 5^n$  avec  $v_0 = \frac{u_0 + 3}{u_0 - 1} = \frac{5}{1} = 5$ . Donc  $v_n = 5 \cdot 5^n = 5^{n+1}$ .

Comme  $v_n = \frac{u_n + 3}{u_n - 1}$ , on obtient  $v_n(u_n - 1) = u_n + 3$ , i.e.  $u_n(v_n - 1) = v_n + 3$ . Ainsi

$$u_n = \frac{v_n + 3}{v_n - 1} = \frac{5^{n+1} + 3}{5^{n+1} - 1}.$$

- d) En factorisant numérateur et dénominateur par  $5^{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{5^{n+1} \left(1 + \frac{3}{5^{n+1}}\right)}{5^{n+1} \left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right)} \\ &= \frac{1 + \frac{3}{5^{n+1}}}{1 - \frac{1}{5^{n+1}}} \end{aligned}$$

Or  $5 > 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^{n+1} = +\infty$ , et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{5^{n+1}} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{5^{n+1}} = 0$ , donc par quotient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

- e) Voici le script Python complété :

```
def rang():
    u=2
    n=0
    while u>=1+10**(-8) :
        u=(2*u+3)/(u+4)
        n=n+1
    return n
```

La valeur obtenue est 12.