Chapitre 3 Géométrie vectorielle - 1

Ce qui est affirmé sans démonstration peut être réfuté sans démonstration.

Euclide (vers 300 av J. -C.).

C'est aussi un autre sujet, auquel je pense par moments depuis près de 40 ans, à savoir les premiers fondements de la géométrie ; je ne sais pas si je vous ai déjà parlé de mes vues à ce sujet. Je n'ai pas encore consolidé certaines choses, mais ma conviction que nous ne pouvons pas démontrer entièrement la géométrie de manière a priori est devenue de plus en plus ferme. Entre-temps, je n'ai probablement plus assez de temps pour tout cela, pour retravailler mes recherches inachevées en vue d'une publication publique, et cela ne se produira peut-être même pas de mon vivant, car je redoute le « cri des béotiens » si jamais j'exprimais mon opinion.

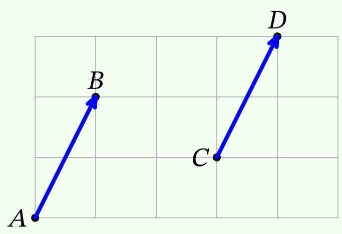
Carl Friedrich Gauss (1777-1855), dans une lettre à Bessel, le 27 juin 1829.

I Vecteurs

3.1.1 Définition

Définition 1 (Vecteur) — Au lycée, on définira un vecteur comme l'élément associé à une translation.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est l'élément associé à la translation qui envoie A sur B.
Deux vecteurs sont donc **égaux** s'ils sont associés à la même translation.

☞ **Exemple 1**



Remarque 1 Un vecteur peut aussi être représenté par une seule lettre (*une* translation), par exemple $\vec{u}$.

Définition 2 (Vecteur) — Un vecteur $\vec{u}$ du plan peut être déterminé par :

- sa **direction** ;
- son **sens** ;
- sa **norme** (qui correspond à sa longueur), et qui se note avec deux barres de chaque côté : $\|\vec{u}\|$.

Proposition 3.1 (Égalité entre deux vecteurs) — *Soient A, B, C, D quatre points du plan. On a :*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \text{ \textbf{si et seulement si} } ABDC \text{ est un \textbf{parallélogramme}.}$$

Remarque 2 S'il existe deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors :

- la **direction** de $\vec{u}$ est la droite (AB) ;
- le **sens** de $\vec{u}$ est de A vers B ;
- la **norme** de $\vec{u}$ est la longueur AB : $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

Proposition 3.2 (Égalité entre vecteurs) — *Deux vecteurs sont égaux s'ils ont **même direction**, **même sens**, et **même norme**.*

Proposition 3.3 (Égalité entre vecteurs, admis) — *Soient A, B, C, D quatre points du plan. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$;
- *ABDC est un* ***parallélogramme****;*
- *D est l'image de C par la translation de vecteur* $\overrightarrow{AB}$.

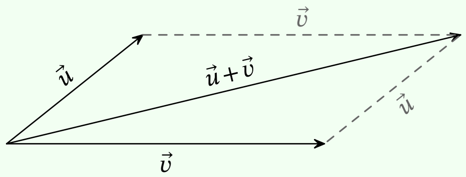
Remarque 3 « Propositions équivalentes » signifie que si l'une des propositions est vraie, alors elles sont toutes vraies.

3.1.2 Somme de vecteurs

Proposition 3.4 — *L'enchaînement (on dit aussi* ***la composition****) de deux translations est une translation.*

Définition 3 (Somme de vecteurs) — La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à l'enchaînement (on dit aussi la **composition**) des translations associées à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

☞ **Exemple 2 (Somme de vecteurs)**



Proposition 3.5 (Commutativité) — *Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :*

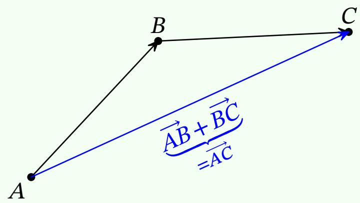
$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}.$$

3.1.3 Relation de Chasles

Proposition 3.6 (Relation de Chasles) — *Pour tous points A, B et C du plan, on a :*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

☞ **Exemple 3 (Relation de Chasles)**



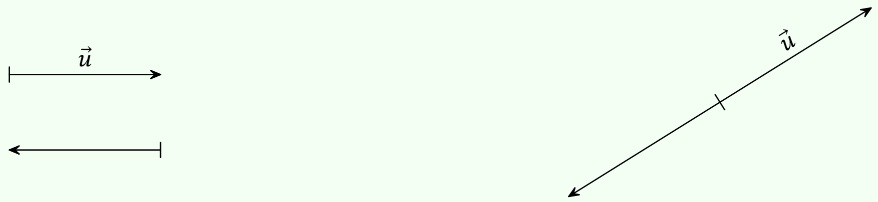
3.1.4 Vecteurs opposés

Définition 4 (Vecteurs opposés) — On appelle **vecteur nul** le vecteur de norme nulle. On le note $\vec{0}$, c'est aussi le vecteur associé à la translation qui laisse fixe chaque point. Deux vecteurs sont dits **opposés** si leur somme est le vecteur nul, c'est-à-dire :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont } \textbf{opposés} \Leftrightarrow \vec{v} + \vec{u} = \vec{0}.$$

On peut noter alors $\vec{u} = -\vec{v}$ et de même $\vec{v} = -\vec{u}$.

☞ **Exemple 4**



Proposition 3.7 (admis) — *Deux vecteurs sont opposés s'ils ont :*
- *même direction ;*
- *même norme ;*
- *des sens différents.*

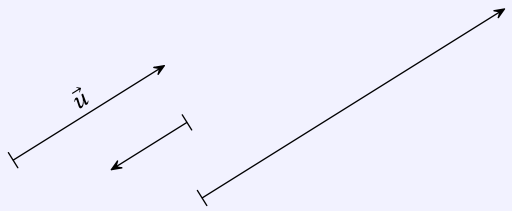
Proposition 3.8 (admis) — *Pour tous points A et B du plan, on a :*

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}.$$

3.1.5 Produit d'un vecteur par un réel

Définition 5 (Produit d'un vecteur par un réel) — Si $\vec{u}$ est un vecteur et λ un réel, alors le vecteur $\lambda\vec{u}$ est le vecteur qui a :

- même direction que $\vec{u}$;
- même sens que $\vec{u}$ si $\lambda \geq 0$, sens opposé à $\vec{u}$ si $\lambda \leq 0$;
- une norme égale à $\lambda \times \|\vec{u}\|$ si λ est positif, $-\lambda \times \|\vec{u}\|$ sinon.



Proposition 3.9 (Distributivité, admis) — *Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et pour tout réel λ, on a :*
- $\lambda\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$;
- $\lambda\vec{0} = \vec{0}$ *et* $0\vec{u} = \vec{0}$.

II Repères vectoriels et coordonnées

3.2.1 Repères

Définition 6 (Repère du plan) — Soient O un point du plan et $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ deux vecteurs non colinéaires (i.e de direction différentes). Alors $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est appelé un **repère** du plan.
- O est appelé **l'origine** du repère ;
- $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est appelé une **base** du plan.

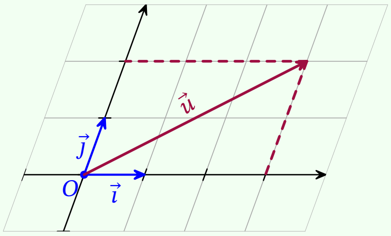
3.2.2 Coordonnées

Proposition 3.10 (Coordonnées dans un repère donné, admise) — *Si $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère du plan, alors pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un unique couple de réels (x,y) tel que :*

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}.$$

On note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, x et y sont appelées les ***coordonnées*** *de $\vec{u}$ dans ce repère.*

☞ **Exemple 5**



III Coordonnées et opérations

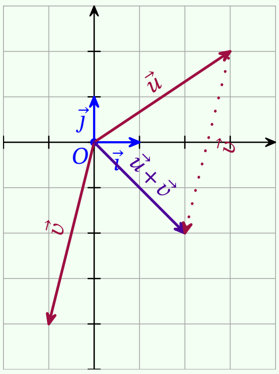
3.3.1 Somme de vecteurs, produit par un réel

Proposition 3.11 (Coordonnées et opérations, admise) — *Soit* $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *deux vecteurs et* k *un nombre réel.*

Alors :

$\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$ *et* $k\vec{u}=\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

☞ **Exemple 6**



3.3.2 Cordonnées d'un point

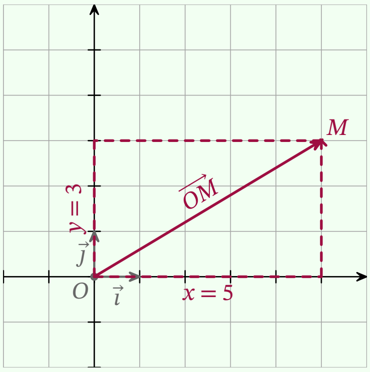
Définition 7 — Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan. Tout point M du plan peut être défini de manière unique par deux nombres x et y tels que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

- x est appelé l'abscisse du point M ;
- y est appelé l'ordonnée du point M.

On note les coordonnées des points en **ligne** : $M(x,y)$.

☞ **Exemple 7**

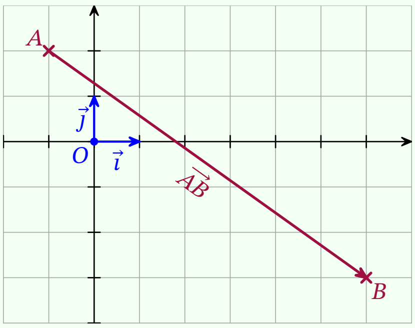


3.3.3 Coordonnées d'un vecteur et extrémités

Proposition 3.12 (Coordonnées d'un vecteur en fonction de ses extrémités, admise) — *Dans un repère, si on considère deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :*

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

☞ **Exemple 8**



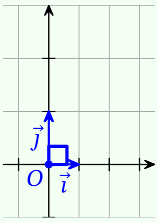
3.3.4 Repères particuliers

Définition 8 (Orthogonalité) — Deux vecteurs sont dits **orthogonaux** si ils forment un **angle droit**.

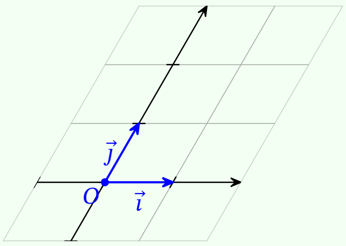
Définition 9 (Repère du plan) — Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan.
- Si les directions de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonales, on dit que le repère est **orthogonal** ;
- si les normes de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont égales à 1, le repère est dit **normé** ;
- Si les directions de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonales et que les normes de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont égales à 1, on dit que le repère est **orthonormé**.

☞ **Exemple 9**

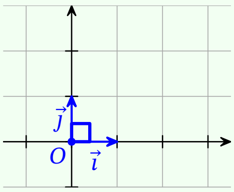
Repère orthogonal



Repère normé



Repère orthonormé



3.3.5 Norme d'un vecteur

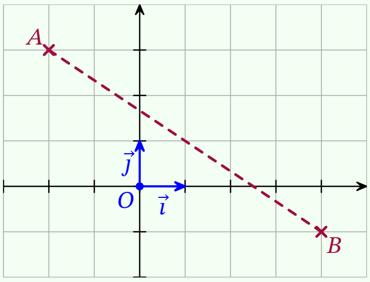
Proposition 3.13 (Norme d'un vecteur) — *On considère un repère* ***orthonormé*** *du plan (c'est-à-dire que $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont deux vecteurs de* ***norme 1*** *et* ***orthogonaux****, ils forment un angle droit).*

Si dans ce repère, on a $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Proposition 3.14 — *Pour un vecteur $\overrightarrow{AB}$, on a :*

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

☞ **Exemple 10**



IV Exercices

♦ **VEC.1** Chacune des figures ci-dessous peut être obtenue à partir d'une seule autre par un glissement selon deux directions à choisir parmi Nord, Sud, Est et Ouest. Compléter le tableau à l'aide des figures :

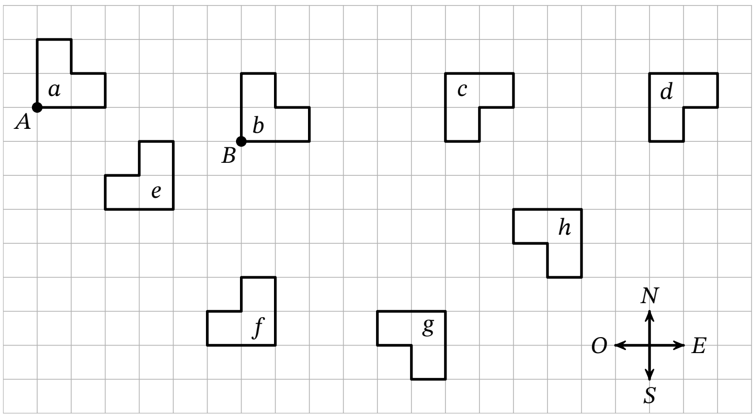
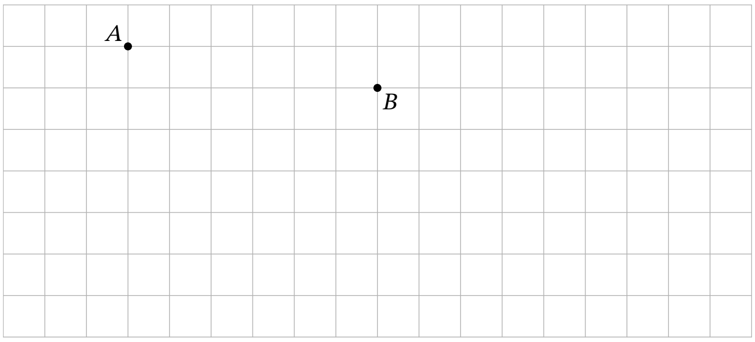


Figure	Figure obtenue par glissement	Déplacement
a		$(6E;1S)$
b		
c		
d		
e		
f		
g		
h		

♦ **VEC.2** On considère la figure ci-dessous :

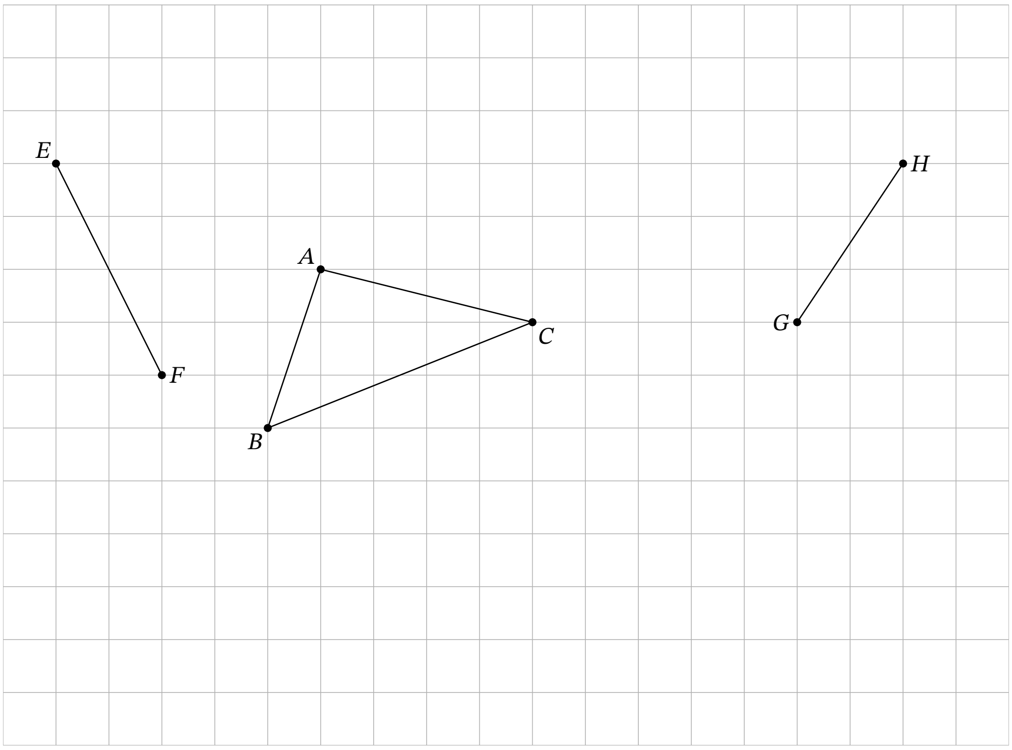


1) Placer l'image A' de A obtenue en déplaçant A de 2 carreaux vers la droite, puis de 5 carreaux vers le bas, puis faire subir à B les mêmes déplacements. On notera B' le point obtenu.

2) Tracer le quadrilatère $AA'B'B$. Que peut-on dire de ce quadrilatère ? Que dire de ses diagonales $[A'B]$ et $[AB']$?

Définition 1 — On dit que A' est associé à A et que B' est associé à B par une même translation.
On dit aussi que A' est l'image de A par cette translation.

♦ **VEC.3** On considère la figure ci-dessous :



1) On désigne par t la translation transformant E en F.

a) Placer les points A', B' et C' images respectives des points A, B et C par la translation t.

b) Tracer une flèche rouge allant de E vers F.
Faire de même pour A et A', B et B' puis C et C'.

Définition 2 — Les quatre « segments fléchés » ainsi définis correspondent aux mêmes déplacements. On dit qu'ils représentent le même **vecteur** et on écrit :

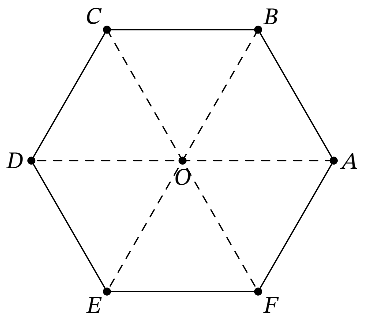
$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}.$$

$\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ sont appelés **représentants** d'un même vecteur.
Le point de départ de chacun des vecteurs est appelé **origine** et le point d'arrivée est appelé **extrémité** du vecteur.

2) Placer sur la figure deux représentants du vecteur $\overrightarrow{AB}$: l'un est d'origine A' et l'autre d'extrémité C.

Premières notions

♦ **VEC.4** On considère l'hexagone régulier ci-dessous :



1) Déterminer le plus possible de vecteurs égaux formés avec les points de la figure.

2) Les égalités suivantes sont-elles vraies ?

a) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OB}$; $DC = OB$; $(DC) = (OB)$.

b) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FE}$; $AF = FE$; $(AF) = (FE)$.

c) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD}$; $OA = OD$; $(OA) = (OD)$.

d) $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EO}$; $EB = EO$; $(EB) = (EO)$.

♦ **VEC.5** Soient $ABCD$ et $ABEF$ deux parallélogrammes.

1) Donner tous les vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2) Démontrer que $CDFE$ est un parallélogramme.

♦ **VEC.6** Soit MAK un triangle équilatéral.

1) a) Construire le point N, image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{AM}$.

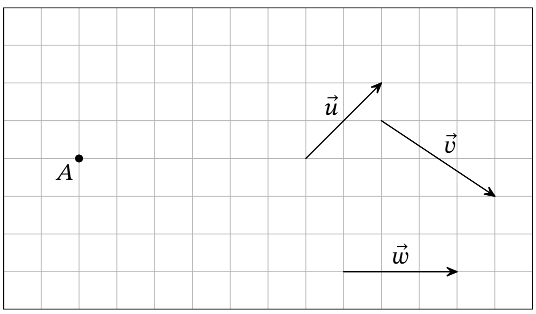
b) Quelle est la nature du quadrilatère $AMNK$? Justifier.

2) a) Construire le point S, symétrique de M par rapport à K.

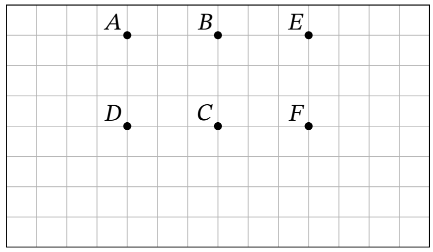
b) Construire le point O tel que K soit le milieu de $[AO]$.

c) Démontrer que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{SO}$.

♦ **VEC.7** Construire un représentant d'origine A pour chacun des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:



♦ **VEC.8** On considère la figure ci-dessous :



1) Indiquer deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$ puis un vecteur égal à $\overrightarrow{AC}$.

2) Construire les points M, N, P et Q tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BD} \qquad \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AF} \qquad \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{ED} \qquad \overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{EC}.$$

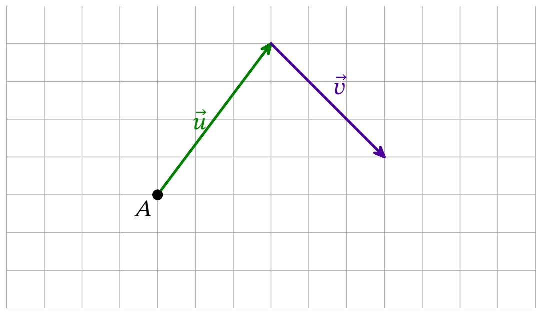
3) Quelle est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$? de vecteur $\overrightarrow{BF}$?

4) Quelle est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{EA}$? de vecteur $\overrightarrow{CD}$?

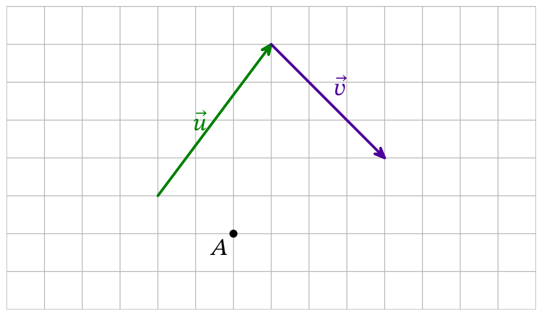
Sommes

♦ **VEC.9** Dans chacun des cas ci-dessous, construire le vecteur d'origine A égal à la somme $\vec{u} + \vec{v}$.

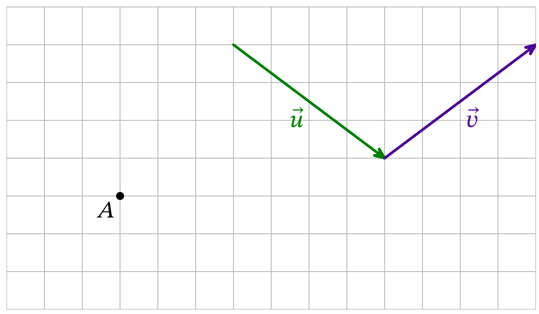
1)



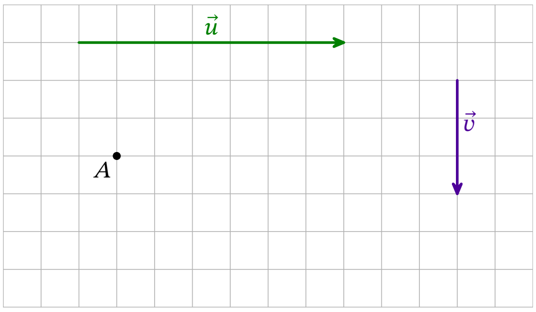
2)



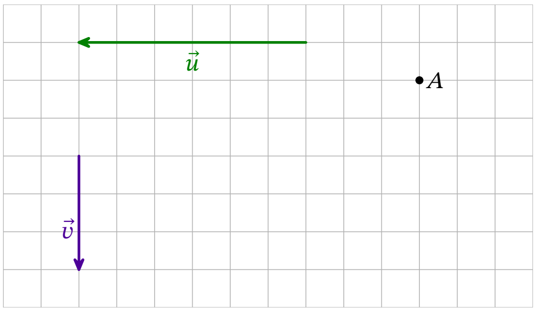
3)



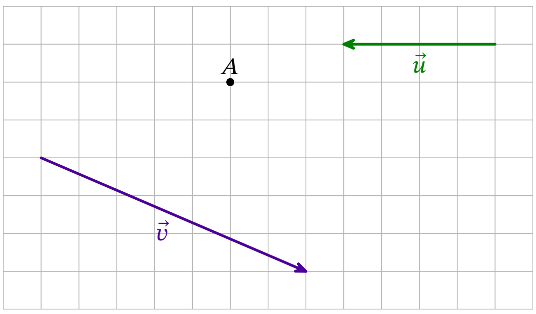
4)



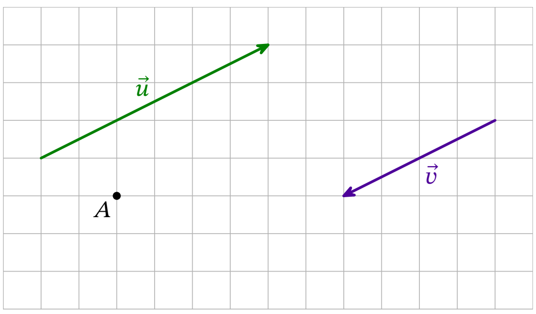
5)



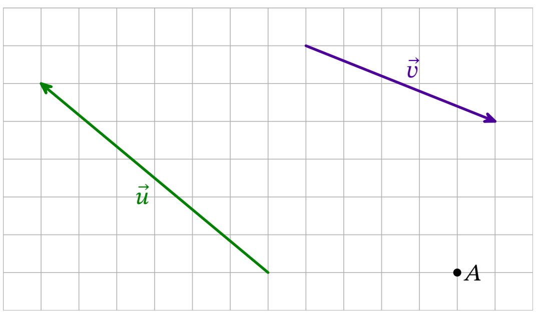
6)



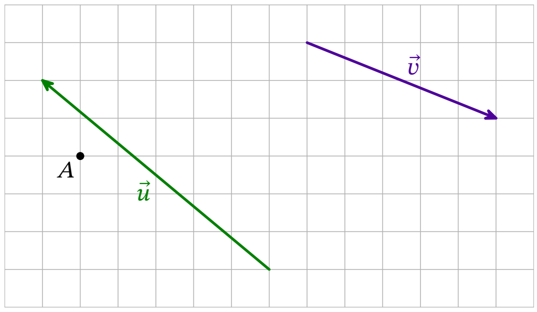
7)



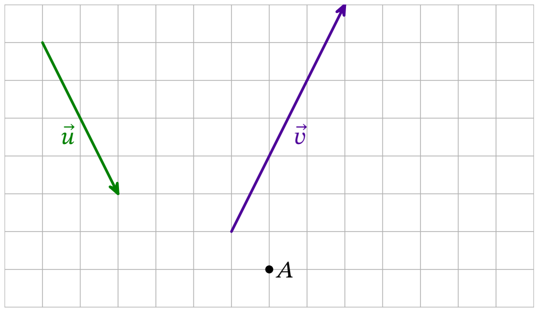
8)



9)



10)



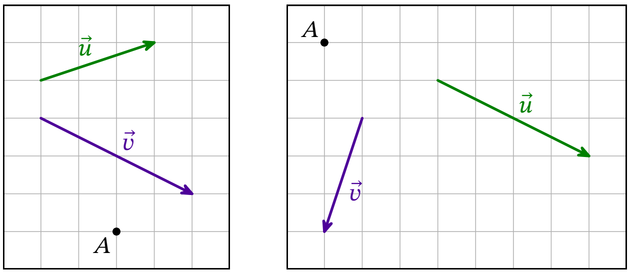
♦ **VEC.10** Dans la figure de l'exercice 4, on pose $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

Exprimer, en utilisant uniquement les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{AO};\quad \overrightarrow{AB};\quad \overrightarrow{EA};\quad \overrightarrow{OF};\quad \overrightarrow{ED};\quad \overrightarrow{DF}.$$

Relation de Chasles, calculs

♦ **VEC.11** Dans chacun des cas, reproduire la figure et construire le vecteur d'origine A égal à $3\vec{u} + 2\vec{v}$.



♦ **VEC.12** Écrire le plus simplement possible :

$\vec{u} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$; $\quad \vec{v} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$;

$\vec{w} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}$;

$\vec{x} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$;

$\vec{y} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{ED}$.

♦ **VEC.13** A, B, C et D sont quatre points du plan. Démontrer que :

1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{DA}$

2) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

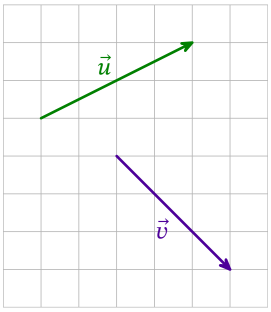
♦ **VEC.14** O et A sont deux points distincts.

1) Placer les points M, N et P tels que :
$\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{ON}=-3{,}5\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OP}=-7\overrightarrow{OA}$.

2) a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$.

b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OP}$ en fonction de $\overrightarrow{ON}$.

♦ **VEC.15** On dispose de la figure ci-dessous :



1) Reproduire cette figure et placer un point A.

2) Placer les points B et C tels que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$.

3) Placer le point D tel que $\overrightarrow{CD}=-\vec{u}$.

4) Placer les points E, F, G, H et I tels que :
$\overrightarrow{AE}=2\vec{u}+\vec{v}$; $\overrightarrow{BF}=2\vec{v}-\vec{u}$;
$\overrightarrow{AG}=\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{2}{3}\vec{v}$; $\overrightarrow{BH}=-\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{5}{3}\vec{v}$; $\overrightarrow{EI}=-\frac{3}{2}\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{v}$.

♦ **VEC.16** Soit ABC un triangle. Placer les points D, E, F, G et H tels que :

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$;

$\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE}$; $\overrightarrow{CH}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$.

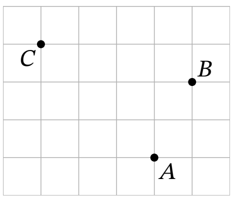
♦ **VEC.17** A et B sont deux points distincts. Placer les points M, N, P et Q tels que :

$\overrightarrow{AM}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{NA}=3\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BQ}=-2\overrightarrow{AQ}$.

♦ **VEC.18** Soit ABC un triangle. Placer les points D, E, F et G tels que :

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$;
$\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$.

♦ **VEC.19** On dispose de la figure ci-dessous :



1) Reproduire cette figure puis placer les points M, N et P tels que :
$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$;
$\overrightarrow{BP}=-2\overrightarrow{BA}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

2) On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$. Soit R le point tel que :

$$\overrightarrow{RA}-4\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{AC}$$

a) À l'aide de la relation de Chasles, exprimer $\overrightarrow{AR}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b) Placer le point R.

3) a) Exprimer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b) En déduire la nature de $ARNM$.

♦ **VEC.20** Soit ABC un triangle. On considère les points D et E définis par :

$$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{CE}=3\overrightarrow{BA}$$

Démontrer que C est le milieu de $[DE]$.

♦ **VEC.21** ABC est un triangle. Les points M, N et P sont définis de la façon suivante :

M est le symétrique de C par rapport à B, $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{BP}$.

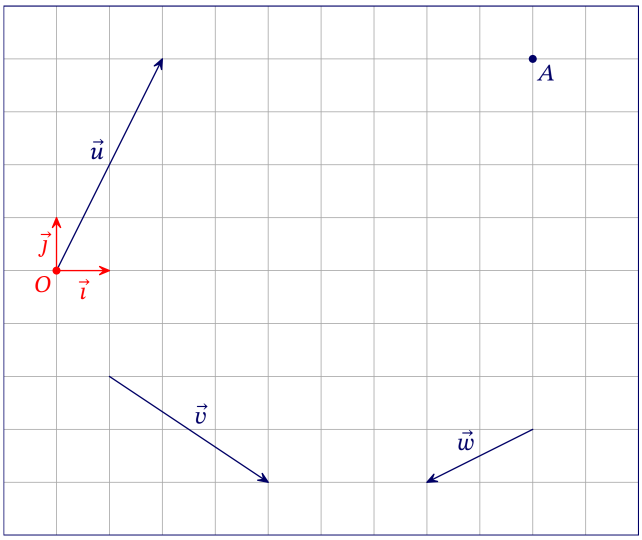
1) Faire une figure et placer M et N.

2) À l'aide de la relation de Chasles, exprimer $\overrightarrow{BP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Placer le point P.

3) En transformant $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}$, démontrer que P est le milieu de $[MN]$.

Intro aux coordonnées

♦ **VEC.22** On considère la figure ci-dessous où le quadrillage est uniforme :



1) Compléter les pointillés par les nombres qui conviennent :

$$\vec{u}=\ldots\ldots\vec{\imath}+\ldots\ldots\vec{\jmath};$$

$$\vec{v}=\ldots\ldots\vec{\imath}+\ldots\ldots\vec{\jmath}.$$

On note $\vec{u}\begin{pmatrix} \dots\dots \\ \dots\dots \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \dots\dots \\ \dots\dots \end{pmatrix}$.

2) Construire le représentant du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ d'origine O et un représentant du vecteur $\vec{v}+3\vec{w}$ d'origine A.

3) Compléter les pointillés par les nombres qui conviennent :

$$\vec{u}+\vec{v} = \dots\dots\vec{\imath} + \dots\dots\vec{\jmath}.$$

$$3\vec{w} = \dots\dots\vec{\imath} + \dots\dots\vec{\jmath}.$$

$$\vec{v}+3\vec{w} = \dots\dots\vec{\imath} + \dots\dots\vec{\jmath}.$$

4) Compléter les propriétés suivantes :

Si, dans une base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on a $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors

$$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}.$$

Si, dans une base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on a $\lambda \in \mathbf{R}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors

$$\lambda\vec{u}\begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}.$$

5) Dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, les coordonnées du point A sont celles du vecteur $\overrightarrow{OA}$, on a : $A(\dots\dots\dots;\dots\dots)$.

6) Quelles sont les coordonnées du point B tel que

$\overrightarrow{OB} = 12\vec{u} - 5\vec{w} + 6\vec{v}$?

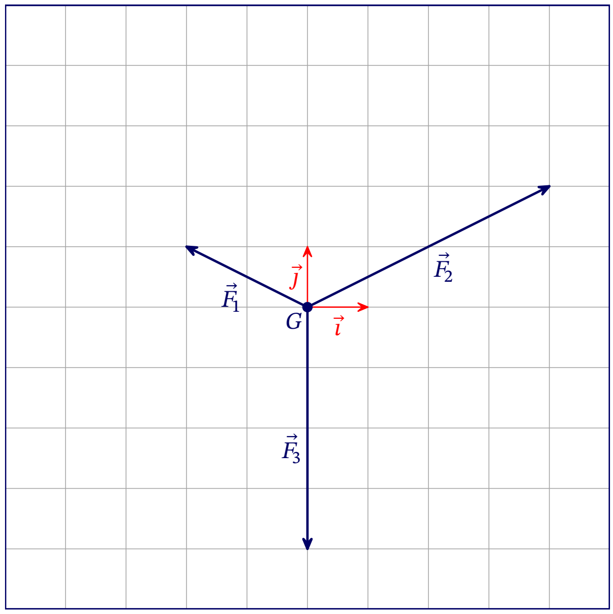
Compléter $B(\dots\dots\dots;\dots\dots\dots)$.

7) Quelles sont les coordonnées du point C tel que

$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$?

Compléter $C(\dots\dots\dots;\dots\dots\dots)$.

♦ **VEC.23** En physique, on peut représenter les forces s'exerçant sur un solide par des vecteurs. Un système est équilibré (c'est-à-dire qu'il ne bouge plus par rapport au référentiel terrestre) lorsque la somme des forces qui s'exercent sur lui est nulle.



1) Écrire les coordonnées des vecteurs forces $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$ relativement à la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$:

$$\vec{F_1}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \quad \vec{F_2}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \quad \vec{F_3}\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

2) Déterminer si le système représenté par le solide assimilé à un point G et les trois forces s'exerçant sur lui $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$ est à l'équilibre.

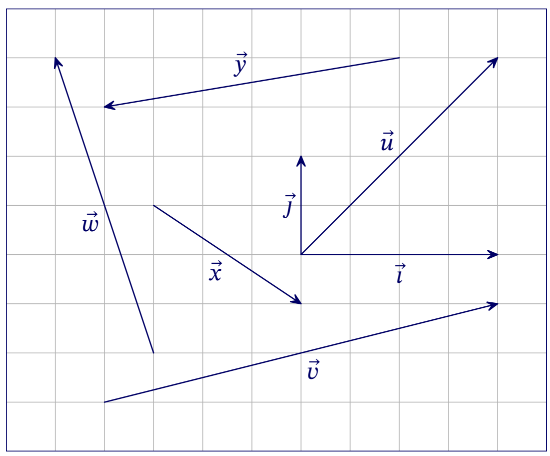
3) On suppose que l'on peut modifier la valeur de la force $\vec{F_1}$, c'est-à-dire la norme du vecteur $\vec{F_1}$, mais pas sa direction. Peut-on faire en sorte que le système soit à l'équilibre ?

Coordonnées

♦ **VEC.24** On donne la figure ci-dessous.

1) Exprimer les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ et $\vec{y}$ en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

2) Donner les coordonnées dans la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$ de chacun de ces vecteurs.



Dans les exercices suivants, on se place dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

♦ **VEC.25** Tracer deux vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

Tracer un représentant de chacun des vecteurs suivants dans la base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$:

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{7}{4}\end{pmatrix}$; $\vec{x}\begin{pmatrix}-2\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$.

♦ **VEC.26** On considère les vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{c}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{d}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ et une base $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ et $\vec{y}$ définis par :

$\vec{u}=-3\vec{a}$; $\vec{v}=\vec{b}+\vec{c}$; $\vec{w}=2\vec{c}+3\vec{d}$;
$\vec{x}=2\vec{a}-4\vec{b}$; $\vec{y}=-\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{d}$.

♦ **VEC.27** On considère les points $A(2;3)$, $B(1;-2)$, $C(-3;-3)$ et $D(0;2)$.

1) Calculer les coordonnées des vecteurs

$$\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{AC},\quad \overrightarrow{BC}\quad \text{et}\quad \overrightarrow{DC}.$$

2) Calculer les coordonnées des vecteurs

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC},\quad 2\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}\quad \text{et}\quad 3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BD}.$$

♦ **VEC.28** Le quadrilatère $ABCD$ est-il un parallélogramme ?

1) $A(-1;3)$; $B(-3;-2)$; $C(1;-1)$; $D(3;4)$.
2) $A(-3;2)$; $B(3;0)$; $C(2;-4)$; $D(-5;-2)$.

♦ **VEC.29** On considère les points $A(2;1)$, $B(-2;3)$ et $C(-1;-1)$. Déterminer les coordonnées du point M tel que :

$$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}.$$

♦ **VEC.30** On considère les points $A(-3;4)$ et $I(2;-4)$.

Déterminer les coordonnées de B tel que I soit le milieu de $[AB]$.

♦ **VEC.31** On considère les points $A(2;1)$, $B(1;-1)$ et $C(5;0)$.

1) Calculer les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2) Calculer les coordonnées de E, le symétrique de C par rapport à A.

♦ **VEC.32** On considère les points A , B et C de coordonnées $A(-2;2)$, $B(1;3)$, $C\left(\frac{1}{2};0\right)$.

Calculer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

♦ **VEC.33** On considère les points $A(-2;2)$, $B(5;6)$, $C(4;-1)$ et J le milieu de $[AC]$.

1) Placer les points dans le repère.
2) Déterminer les coordonnées de M tel que :

$$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

3) Déterminer les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
4) Déterminer les coordonnées de N tel que :

$$\overrightarrow{JN}=3\overrightarrow{JM}.$$

5) Déterminer les coordonnées de P tel que :

$$\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}=\vec{0}.$$

6) Déterminer les coordonnées de R tel que :

$$3\overrightarrow{RA}-2\overrightarrow{RB}-\overrightarrow{RC}=2\overrightarrow{AB}.$$