

2 | Nombres complexes

Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires, c'est à dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celles qu'on imagine; comme encore qu'on puisse en imaginer trois en celle-ci :

$$x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0,$$

il n'y en a toutefois qu'une réelle qui est 2, et pour les deux autres, quoiqu'on les augmente ou diminue, ou multiplie en la façon que je viens d'expliquer, on ne saurait les rendre autres qu'imaginaires.

René Descartes (1596-1650).

I Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes

2.1.1 Définition

Le théorème suivant explique en fait ce que sont les nombres complexes de manière "concrète"; la construction du corps des nombres complexes à partir des polynômes et en particulier du polynôme $X^2 + 1$ est très largement hors-programme. On se contentera donc pour l'instant de comprendre que ce corps généralise celui des réels, de la façon suivante :

Théorème 2.1 (admis) — Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres de la forme $z = a + ib$ où a et b sont réels et i est un nombre dit **imaginaire** qui vérifie $i^2 = -1$ (en un sens que l'on définira).

- $a + ib$ est appelé la **forme algébrique** du nombre z , elle est **unique**;
- a est appelé la partie réelle de z et on note $a = \Re(z)$ ou $a = \text{Re}(z)$;
- b est appelé la partie imaginaire de z et on note $b = \Im(z)$ ou $b = \text{Im}(z)$;
- Si $b = 0$, on dit que le nombre z est **réel**;
- Si $a = 0$, on dit que le nombre z est **imaginaire pur**.

$\mathbb{C}$ est appelé l'ensemble des **nombres complexes**. Concernant le troisième point, on identifie l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ à une sous-partie des nombres complexes : en effet $\mathbb{R}$ peut être vu comme les nombres complexes de partie imaginaire nulle :

$$\mathbb{R} \simeq \{a + i0, \quad a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}.$$

Proposition 2.2 — De l'unicité de l'écriture sous forme algébrique d'un nombre complexe, on déduit immédiatement que deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

2.1.2 Opérations sur les nombres complexes

Proposition 2.3 (Opérations sur les nombres complexes, admis) — Pour tous $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$:

- $(a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d)$
- $(a + ib) \times (c + id) = ac - bd + i(ad + bc)$

Il faut essentiellement retenir que $+$ et $\times$ se comportent de manière usuelle, et que $i \times i = i^2 = -1$.

 **Exemple 1** Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

- $(1 - i)(-2 + 3i)$
- $3 + 4i - 2(1 + i)$

Proposition 2.4 (Propriétés de $+$ et $\times$) — $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un **anneau commutatif**, c'est-à-dire que pour tous nombres complexes z, z' et z'' :

- $+$ et $\times$ sont **associatives** : $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$ et $(z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'')$

- $+$ et $\times$ sont **commutatifs** : $z + z' = z' + z$ et $z \times z' = z' \times z$
- Il existe un **élément neutre** pour $+$: $z + 0 = 0 + z = z$
- Il existe un **élément neutre** pour $\times$: $z \times 1 = 1 \times z = z$
- On a **distributivité** : $z \times (z' + z'') = z \times z' + z \times z''$

2.1.3 Inverse d'un nombre complexe

Proposition 2.5 (Inverses) — Tout nombre complexe z non nul est inversible et si $z = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

Cela permet d'affirmer que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un **corps** (commutatif).

 **Exemple 2** Mettre sous forme algébrique les nombres suivants :

- $\frac{1}{1+i}$
- $\frac{3}{4i}$
- $\frac{-i}{1-i}$
- $\frac{1}{5-3i}$

Proposition 2.6 (Intégrité) — $(\mathbb{C}, +, \times)$ est intègre : pour tous nombres complexes z et z' :

$$zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z' = 0.$$

Autrement dit, **un produit de nombres complexes est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.**

2.1.4 Conjugaison

Définition 1 (Conjugué d'un nombre complexe) — Si z est un nombre complexe de la forme $z = a + ib$, on définit le **conjugué** de z noté $\bar{z}$ par :

$$\bar{z} = a - ib.$$

 **Exemple 3** Mettre sous forme algébrique les nombres suivants :

- $\overline{3+i}$
- $\overline{4-2i}$
- $\overline{\left(\frac{i}{3}\right)}$
- $\overline{\left(\frac{3}{i}\right)}$

Proposition 2.7 (Opérations sur les conjugués) — Pour tous nombres complexes z et z' :

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad (z' \neq 0 \text{ bien sûr}).$

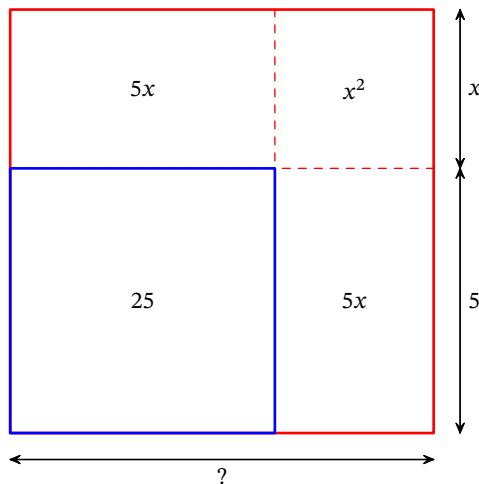
Proposition 2.8 — Pour tous nombres complexes z et z' :

- $\bar{\bar{z}} = z;$
- $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R};$
- $z = -\bar{z} \Leftrightarrow z \text{ est imaginaire pur};$
- $\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ et } \Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i};$
- $z\bar{z} = (\Re(z))^2 + (\Im(z))^2.$

II Exercices

Introduction

Au XVI^e siècle, les équations de degré deux sont bien connues et résolues ; même si la formulation algébrique actuelle n'était pas encore claire. Les Grecs proposaient ainsi des méthodes géométriques de résolution de ces équations :



Résolution géométrique de l'équation
 $x^2 + 10x = 39$.

Cela étant, dans ce cas là les Grecs n'admettaient pas l'existence d'une solution à l'équation ci-dessus qui vaudrait -13 .

Pour le degré trois, les mathématiciens butent sur la résolution géométrique de ces équations. En 1535, Tartaglia (mathématicien italien) parvient à résoudre quelques équations de degré 3, mais c'est Cardan (un autre mathématicien italien) qui, en subtilisant les résultats de Tartaglia et en les améliorant grandement, va complètement résoudre le problème en publiant en 1545 son *Ars Magna*. Voici comment il procède :

- Tout d'abord, il montre qu'une équation de degré 3 du type $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ où $a \neq 0$ peut se réécrire $X^3 + pX + q = 0$.
- Il se concentre ensuite sur l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

et utilise ensuite le vocabulaire suivant :

- q est le « nombre de l'équation » ;
- x est la « chose » de l'équation ;
- p est le « nombre de la chose ».

Sa démarche est la suivante :

- Le tiers du nombre de la chose au cube étant obtenu, on y ajoute le carré de la moitié du nombre de l'équation et, du tout, on extrait la racine carrée que l'on met de côté ;

- Le demi-nombre, tu ajoutes ou tu enlèves au nombre obtenu précédemment : tu as le binôme avec son apotome ;
- En extrayant la racine cubique de l'apotome et celle de son binôme, le résidu de leurs différences est la valeur de la racine.

◆ NC.1 (Un exemple)

- 1) En partant de l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ où $a \neq 0$, poser $x = mX + p$ et déterminer m et p pour obtenir l'équation sur laquelle se concentre Cardan.
- 2) Suivre la démarche de Cardan pour l'équation

$$x^3 + 24x = 56.$$

Quelle solution de cette équation obtient-on ?

◆ NC.2 (La démarche de Bombelli)

- 1) Suivre la démarche de Cardan pour l'équation

$$x^3 - 15x = 4.$$

Que se passe-t-il ?

- 2) À l'aide de la calculatrice, déterminer une solution simple de l'équation précédente.
- 3) Bombelli décide alors d'écrire :

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-121} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{-121} - 2},$$

qu'il réécrit

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}.$$

Il calcule ensuite $(2 + \sqrt{-1})^3$ et $(2 - \sqrt{-1})^3$ où $\sqrt{-1}$ désigne un nombre dont le carré vaut -1 . Effectuer ce calcul.

- 4) Quelle solution parvient-il à déterminer ?

Petits calculs

◆ NC.3 On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 2 - 3i$. Donner la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

- | | | |
|----------------------------|------------------------------|---------------------------------|
| 1) $z_3 = z_1 + z_2$; | 4) $z_6 = \frac{z_1}{z_2}$; | 7) $z_9 = \frac{1}{z_2}$; |
| 2) $z_4 = z_1 z_2$; | 5) $z_7 = \overline{z_1}$; | |
| 3) $z_5 = \frac{1}{z_1}$; | 6) $z_8 = z_1 - z_2$; | 8) $z_{10} = \frac{z_2}{z_1}$. |

◆ NC.4 Mettre sous forme algébrique les nombres suivants :

- $z_1 = (2 + 5i) + (i + 3)$;
- $z_2 = 4(-2 + 3i) + 3(-5 - 8i)$;
- $z_3 = (2 - i)(3 + 8i)$;
- $z_4 = (1 - i)\overline{(1 + i)}$;
- $z_5 = i(1 - 3i)^2$;
- $z_6 = (1 + i)^3$;
- $z_7 = \frac{1}{2 + 3i}$;
- $z_8 = \frac{1 - i}{4 - i}$.

♦ **NC.5** Démontrer que, si z est un imaginaire pur et si n est un entier naturel impair, alors z^n est également un imaginaire pur.

♦ **NC.6** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $z_n = (2 - 2i)^{4n}$. Déterminer $\Re(z_n)$ et $\Im(z_n)$.

☞ **Indications exercice 6 :** Calculer $(2 - 2i)^4$.

♦ **NC.7** On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- 1) Vérifier que $j^3 = 1$.
- 2) Vérifier que $1 + j + j^2 = 0$.

♦ **NC.8** Soit $z = \frac{-4}{1 + i\sqrt{3}}$.

- 1) Calculer la forme algébrique de z .
- 2) Calculer z^3 .

♦ **NC.9** Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $z - \bar{z}(iz + 1)$ est un imaginaire pur.

☞ **Indications exercice 9 :** Calculer $\overline{z - \bar{z}(iz + 1)}$.

♦ **NC.10** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$$(iz + 1)(z - 1 + 3i) = 0.$$

Même question avec (F) :

$$(iz - 1)(z + 1 - 3i) = 0.$$

Calculs

♦ **NC.11** Pour tout complexe z , on pose $Z = z - 2\bar{z} + i$.

- 1) Calculer Z dans les cas suivants : $z = 0$; $z = i$ puis $z = 1 - i$.
- 2) On écrit z sous forme algébrique $z = x + iy$. Déterminer la forme algébrique de Z en fonction de x et y .
- 3) Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $Z = 1 - i$.
- 4) En déduire que Z est imaginaire pur si et seulement si z est imaginaire pur.

♦ **NC.12** À tout nombre complexe z différent de i , on associe le nombre complexe Z défini par

$$Z = \frac{z - 1 + 2i}{z - i}.$$

- 1) Calculer la valeur de Z en prenant $z = 1 - i$ (sous forme algébrique).
- 2) On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ avec $x, y, X, Y \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que

$$X = \frac{x^2 - x + y^2 + y - 2}{x^2 + (y - 1)^2}, \quad Y = \frac{3x + y - 1}{x^2 + (y - 1)^2}.$$

- b) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que Z soit réel.
- c) Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

♦ **NC.13** Quels sont les nombres complexes dont le carré est réel ?

♦ **NC.14** Soit z un nombre complexe non nul. Dire, pour chacun des nombres complexes A , B et C , s'il est réel ou imaginaire pur :

$$\bullet A = z^2 + \bar{z}^2; \quad \bullet B = \frac{z - \bar{z}}{z + \bar{z}}; \quad \bullet C = \frac{z^2 - \bar{z}^2}{z\bar{z} + 3}.$$

♦ **NC.15** Si z est un nombre complexe, on pose $Z = z - 2\bar{z} + i$.

- 1) Calculer Z dans les cas suivants : $z = 0$, $z = i$ et $z = 1 - i$.
- 2) On écrit z sous forme algébrique $z = a + ib$. Exprimer Z en fonction des réels a et b .
- 3) À quelle condition nécessaire et suffisante Z est-il imaginaire pur ?

♦ **NC.16** Déterminer les entiers naturels n tels que $(1 + i\sqrt{3})^n$ soit un réel positif.

♦ **NC.17** Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application telle que :

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

Quel est l'ensemble des nombres complexes dont l'image par f est réelle ?

♦ **NC.18 (Racines carrées complexes)**

- 1) Si a est un nombre réel, donner les solutions de l'équation :

$$z^2 = a.$$

(On distinguera les cas $a \geq 0$ et $a < 0$).

- 2) Résoudre l'équation $z^2 = i$.
- 3) Si $Z = a + ib$ est un nombre complexe, donner les solutions (dans $\mathbb{C}$) de l'équation :

$$z^2 = Z.$$

♦ **NC.19 (Suite arithmético-géométrique)** Soit α un nombre complexe différent de 1 et la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes telle que :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \alpha z_n - i \end{cases}$$

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\ell = \alpha\ell - i$.
- 2) Montrer que la suite définie par $x_n = z_n - \ell$ est géométrique.
- 3) Calculer z_n en fonction de n .
- ♦ **NC.20** Que dire de l'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

$$f(z) = z\bar{z} + 3(z + \bar{z}) - i(z - \bar{z}) \quad ?$$
- 3) Montrer que $z = z'(u + iv) + r$ où $r \in \mathbb{Z}[i]$ et $N(r) < N(z')$.
 $u + iv$ sera alors un quotient de la division euclidienne de z par z' , et r un reste de la division euclidienne de z par z' (ils ne sont ici, pas forcément uniques).
- 4) Déterminer une division euclidienne (dans $\mathbb{Z}[i]$) de $2 + 5i$ par $1 - 2i$.

♦ **NC.21 (Entiers de Gauss, *)** Dans tout l'exercice, on note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Un nombre complexe z est donc un entier de Gauss si et seulement si $\Re(z) \in \mathbb{Z}$ et $\Im(z) \in \mathbb{Z}$. Cet ensemble est appelé **l'ensemble des entiers de Gauss**. Nous allons voir quelques propriétés de cet ensemble.

Partie A - Éléments inversibles

- 1) À quelle condition un réel est-il un entier de Gauss ?
0 et 1 sont donc des entiers de Gauss.
- 2) Soit z et z' deux entiers de Gauss. Montrer que $z + z'$, $z - z'$ et zz' sont des entiers de Gauss.
- 3) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse : « Pour tous entiers de Gauss z et z' tel que $z' \neq 0$, $\frac{z}{z'}$ est un entier de Gauss » ?
- 4) Pour tout nombre complexe z , on pose $N(z) = z\bar{z}$.
 - a) Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z' , $N(zz') = N(z)N(z')$.
 - b) Démontrer que, si $z \in \mathbb{Z}[i]$, alors $N(z) \in \mathbb{Z}$. La réciproque est-elle vraie ?
 - c) Soit z un entier de Gauss. Dédurre des questions précédentes que si $\frac{1}{z} \in \mathbb{Z}[i]$ alors $N(z) = 1$.
 - d) Dédurre de la question précédente les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers de Gauss tels que $\frac{1}{z}$ est un entier de Gauss.
- 5) Soit k un entier strictement positif. Déterminer l'ensemble des entiers de Gauss z tels que $N(z) = 4k - 1$.

Partie B - Une division euclidienne

On va montrer dans cette partie que les entiers de Gauss peuvent être munis d'une division euclidienne, comme les entiers relatifs. Cela permet d'y généraliser l'arithmétique que vous connaissez et que nous approfondirons : nombres premiers, décomposition en facteurs irréductibles, idéaux, etc...

Soient z et z' deux éléments de $\mathbb{Z}[i]$, où $z' \neq 0$.

- 1) Justifier que $\frac{z}{z'} = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$.
- 2) Justifier qu'on peut choisir $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que :

$$|u - a| \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad |v - b| \leq \frac{1}{2}.$$